Elementararithmetik

<36610528860012

Grundzüge

einer

Elementararithmetik

als

Leitfaden zu academischen Vorträgen

von

Dr. M. Cantor,

Privatdocent.

Heidelberg.

Verlag von Bangel und Schmitt

1855.

Druck von C. W. Leske in Darmstadt.

Vorrede.

Wenn der Verfasser es unternimmt, die Anzahl der Lehrbücher der Arithmetik noch um Eines zu vermehren, so ist es wohl seine Pflicht, sich darüber zu erklären, in wie fern ihm die Herausgabe dieses Büchelchens berechtigt erscheint.

Theilweise sagt dieses schon der Titel: „Grundzüge einer Elementararithmetik als Leitfaden zu academischen Vorträgen.“ So viele größere und kleinere Werke zum Selbststudium und zum Gebrauche an höheren und niederen Schulanstalten auch existiren, so ist doch dem Verfasser kaum Eines bekannt, welches compendiös genug wäre, um als Leitfaden, oder zugleich wissenschaftlich genug, um als Leitfaden für academische Vorträge zu dienen.

Freilich pflegt die Elementararithmetik häufig als diejenige Parthie bezeichnet zu werden, die auf Schulen von dem Standpunkte der Lyceen und Gymnasien zum Zwecke allgemeiner wissenschaftlicher Bildung gelehrt wird. Aber weil der Gegenstand des Studiums auf Schule und Universität ein im Allgemeinen total verschiedener ist, so muß um so mehr bei scheinbarer Identität des Gegenstandes der Standpunkt ein veränderter sein, aus dem eine andere An=

schauung und Behandlungsweise hervorgeht. Es ist daher natürlich, daß auch in dem zu Grunde zu legenden Leitfaden diese Verschiedenheit hervortreten muß.

Worin diese Verschiedenheit zu bestehen hat, darüber schien dem Verfasser kein Zweifel möglich. In einem Schulwerke, wo der Zweck darin liegt, durch Einübung mathematischer Methoden sich an Strenge der Schlüsse zu gewöhnen, mit einem Worte, logisch denken zu lernen, werden einzelne Sätze, einzelne interessante Parthieen ausführlich entwickelt werden, und besonders der anschauliche geometrische Theil der Elementararithmetik wird reichen Stoff zum bildenden Nachdenken geben. Auf dem Universitätsstandpunkte hingegen, wo die Elementararithmetik nur als Stützpunkt der höheren Mathematik dient, die selbst wieder stolz darauf ist, der Hebel zu sein, vermittelst dessen die Wucht der Naturwissenschaften bewältigt werden soll, kommt es weniger darauf an, einzelne Sätze zu beweisen, als ein festes Fundament zu gewinnen. Hier werden also die eigentlichen Lehrsätze mehr im Vorbeigehen behandelt werden dürfen, während das Hauptgewicht auf die theoretischen Begründungen fällt, auf das, was man die Philosophie der Mathematik nennen kann.

Wenn es nun Schulbücher der ersteren Gattung in reichster Vollständigkeit giebt, so ist dem Verfasser, wie schon bemerkt, kein kürzer gefaßtes Werk der zweiten Art bekannt, und diesem, wie ihm schien, fühlbaren Mangel suchte er, so viel ihm möglich war, abzuhelfen.

In dem vorliegenden Werkchen ist daher die bei Weitem hervorragendste Stelle den Einleitungen in die einzelnen Kapitel zugetheilt, und es ward zum Mindesten beabsichtigt, ein Princip dabei scharf hervortreten zu lassen.

Dieser Grundgedanke heißt: die Mathematik ist eine Erfahrungswissenschaft. Sie unterscheidet sich von den anderen empirischen Wissenschaften höchstens dadurch, daß die Mathematik nur zum Anfange einige Erfahrungssätze entlehnt, und auf diesen dann vermittelst Abstractionen fortbaut; während die übrigen Erfahrungswissenschaften, die noch nicht zu demselben Grade von Ausbildung gekommen sind, damit nicht zufrieden sind, noch auch zufrieden sein können. Sie müssen immerfort neue Erfahrungssätze haben, weil man bei ihnen noch nicht so weit ist, angeben zu können, welche Sätze die Fundamentalsätze sind, auf welchen Alles andere beruht. Je mehr die Mathematik aber auf die Naturwissenschaften angewandt wird, desto mehr werden diese selbst gewissermaßen zu mathematischen Wissenschaften, d. h. sie bedürfen alsdann nur weniger Erfahrungssätze, die sie an die Spitze stellen. Auf dieser Stufe steht schon die ganze Lehre von der Anziehung, auf diese scheint zunächst die Optik sich erheben zu können.

Was nun die Elementararithmetik aus der Erfahrung entlehnt, das ist, in wenig Worte gefaßt, zuerst die Vielheit, dann der Gegensatz, die Theilbarkeit, ferner Homogeneität und Heterogeneität, endlich die Verallgemeinerung des Gegensatzes als conträrer Gegensatz.

Eine nach diesem Systeme weitergeführte Mathematik hätte dann in der Differentialrechnung nur noch eine letzte Thatsache aus der Erfahrung zu entnehmen und auf die in ihr behandelten Größen zu übertragen: das Werden. Gern würde der Verfasser seine Ansichten in diesem Sinne weiter veröffentlichen, wenn ihm irgend Aufmunterung zu Theil würde. Besonders würde eine Behandlung der höheren Mathematik mit Benutzung der lateralen Zahlen sich in

mancher Beziehung von den bisherigen Werken unterscheiden müssen.

Daß bei der Ausarbeitung dieses Leitfadens viele Vorarbeiten benutzt wurden, stellt der Verfasser so wenig in Abrede, daß er vielmehr an den meisten Stellen seine Quellen angiebt, wodurch zugleich der Vortheil entsteht, daß der Leser sich eine Bekanntschaft mit den meisten Namen erwirbt, die in der Geschichte der Mathematik glänzen. Ein Werkchen, welches im Texte nirgends angeführt wurde, ist hier noch zu erwähnen: „Wittstein, Lehrbuch der Arithmetik, Hannover 1846." Es ist nur zu bedauern, daß davon die dritte Abtheilung nicht erschienen ist, da die beiden ersten sich sehr dem Zwecke nähern, der hier verfolgt wird.

Endlich bleibt dem Verfasser noch übrig, die Gefühle der Hochachtung und des Dankes auszusprechen, die er Herrn Professor Stern, seinem geschätzten Lehrer, schuldet. Möge derselbe in diesem Erstlingswerke einige Ansichten wiederfinden, die er selbst theilt.

Inhalt.

Einleitung.

§. 1.

Die Mathematik ist die Wissenschaft von den Größen.

Unter Größen aber verstehen wir Eigenschaften, welche, obgleich an mehreren Dingen von derselben Art, dennoch an Einem in stärkerem oder schwächerem Maße vorkommen, als an Anderen. Oder: Größe ist, wovon es ein gleichartiges Mehr oder Weniger giebt. Durch die Verbindung der Gegenstände der Außenwelt mit einander entsteht ein Abhängigkeitsverhältniß der Größen, welches als Erfahrungsaxiom ergiebt, daß

wenn eine Größe sich verändert, nicht alle anderen unverändert die nämlichen bleiben können.

Die Gesetze dieses Abhängigkeitsverhältnisses und die Kunst, vermittelst derselben die einzelnen Größen aus einander herzuleiten, bilden die Größenlehre oder Mathematik.

Anmerkung 1. Von dieser Definition der Größe weichen folgende mehr oder weniger ab: Größe ist der innere Unterschied ähnlicher Dinge (Leibnitz). Größe ist das Reale, was innerhalb vollendeter Grenzen begriffen ist (Schweins). Das völlig begrenzte Stetige ist eine Größe (Ohm).

Anmerkung 2. Auch das Unendliche ist nach unserer Definition als Größe zu betrachten. Denn giebt es auch keine mehr als unendliche Zeit, keinen mehr als unendlichen Raum u. s. w., so giebt es doch eine weniger als unendliche Zeit, oder eine endliche Zeit, einen weniger als unendlichen Raum, oder einen

endlichen Raum u. s. w. So wird das Unendliche in das Gebiet der Mathematik einverleibt, was nach anderen Definitionen unstatthaft ist.

§. 2.

Jede Vielheit von Gegenständen, welche entweder gleichartig sind, oder doch als gleichartig gedacht werden, ist demnach eine Größe.

Man nennt diese Größe eine Anzahl und einen jener Gegenstände die zu Grunde liegende Einheit.

Abstrahirt man aber von bestimmten Gegenständen und betrachtet nur die Vielheit an sich, so gelangt man zum Begriffe der abstracten Zahl. Auch die Zahl ist eine Größe, weil bei ihr ein Mehr oder Weniger stattfinden kann. Die Zahl ist die allgemeinste Größe.

§. 3.

Der Theil der Mathematik, der sich mit Zahlengrößen und deren Verknüpfung beschäftigt, heißt Analysis oder Arithmetik im weiteren Sinne.

Eine andere Art von Größen machen die Gebilde des Raumes aus. Die Betrachtung derselben nach Ausdehnung und Lage gehört in die Geometrie.

§. 4.

Bei den Alten ging die Geometrie der Arithmetik voraus. Die Sätze der Arithmetik galten nur, in so fern sie einer geometrischen Deutung fähig waren. Von den neueren Mathematikern hat besonders Martin Ohm und seine Schule das entgegengesetzte Extrem zum Principe genommen. Ihnen gelten alle Formeln, ohne daß denselben ein bestimmtes Object unterlegt zu werden braucht.

Die Wahrheit ist hier nach beiden Seiten verzerrt. Allerdings muß die Arithmetik der Geometrie vorausgehen, weil die Zahl als allgemeinste Größe zur Vergleichung aller übrigen Größen dient. Aber andererseits darf nicht außer Augen gelassen werden, daß die Zahl ihren Ursprung in dem Begriffe der Geschiedenheit von neben einander existirenden Individuen hat. Die Mathematik ist eine Erfahrungswissenschaft, in so fern sie von der Betrachtung von Objecten der Außenwelt ihren Anfang nimmt. Nur durch Abstraction von

Gegenständen entsteht die Zahl. Und diese Abstraction selbst ist nur am Beginne der Arithmetik eine vollständige. Im weiteren Verlaufe derselben nimmt sie immer mehr ab, und man sieht sich genöthigt, der Zahl mehr und mehr Eigenschaften jener Gegenstände wieder beizulegen.

§. 5.

Mit dem Begriffe der Zahl erhalten wir gleichzeitig auch den der Zahlenreihe, d. h. der unendlichen Reihenfolge von Zahlen, welche dadurch entsteht, daß eine vorhandene Vielheit durch allmäliges Hinzukommen einer neuen Einheit vermehrt wird. Eine Zahl, welche aus mehr Einheiten besteht als eine andere, heißt größer als jene.

Um ein Bild der Zahlenreihe zu erhalten, können wir uns die Einheit als eine Längeneinheit denken, deren mehrere in gerader Linie an einander gesetzt die verschiedenen Längen, d. h. Zahlen darstellen sollen (Figur 1). Die Endpunkte der verschiedenen Längen werden nach ihrer Reihenfolge mit den auf einander folgenden Zahlen zu bezeichnen sein, während einer von ihnen der Anfangspunkt ist, von welchem aus die Reihe einseitig unbegrenzt fortläuft.

§. 6.

Irgend einen Punkt der Zahlenreihe auf eine vorgeschriebene Weise bestimmen heißt Rechnen, und die verschiedenen Bestimmungsweisen bilden die verschiedenen Rechnungsarten.

Anmerkung. Der der Ohm'schen Schule in §. 4 gemachte Vorwurf des bloß formellen Verfahrens rechtfertigt sich schon durch deren Definition des Rechnens: Rechnen heißt gegebene Ausdrücke mittelst der Gesetze der Operationen umformen (Ohm, die Arithmetik bis zu den höheren Gleichungen. 3. Aufl. Berl. 1844).

§. 7.

Alle Rechnungsarten oder Rechnungsoperationen können entweder an bestimmt angegebenen Zahlen vorgenommen werden und geben dann in ihrer Zusammenfassung das Zahlenrechnen im engeren Sinne; oder wir können allgemeine Symbole wählen, durch welche irgend Zahlen angedeutet sind, und mit diesen rechnen. Zu

solchen Symbolen wählte man die Buchstaben und nennt daher dieses Rechnen die Buchstabenrechnung.

Franciscus Vieta (geb. 1540 zu Fontenoi in Poitou, gest. 1603 in Paris) war der Erste, der allgemeine Zahlzeichen und zwar große lateinische Buchstaben gebrauchte. Die jetzt gewöhnlicheren kleine lateinische Buchstaben hat zuerst Thomas Harriot angewandt in dem erst zehn Jahre nach seinem Tode erschienenen Werke: Artis analyticae praxis ad aequationes algebraicas nova expedita et generali methodo resolvendas, Londini 1631, fol.

§. 8.

Da die Zahlenreihe unendlich ist, und wir mit dem Zählen, d. h. mit der Angabe der auf einander folgenden Zahlen ohne Ende fortfahren können, so würden der Zahlennamen und Zahlenzeichen bald so viele werden, daß das Gedächtniß sie nicht mehr fassen könnte, wenn man nicht mit einer mäßigen Menge von Wörtern und Zeichen alle möglichen Zahlen, so groß sie auch sein mögen, auszudrücken suchte. Dieses geschieht nun durch das sogenannte Zahlensystem, d. h. durch den Gebrauch der Position zur Bestimmung des erhöhten Werthes weniger Zahlzeichen.

An und für sich ist es gleichgültig, wie vielen auf einander folgenden Zahlen von der Einheit an man besondere Namen und Zeichen beilegt, wenn deren nur nicht zu viele sind.

Fast allgemein hat man indessen folgenden Zahlen:

eins	zwei	drei	vier	fünf	sechs	sieben	acht	neun
1	2	3	4	5	6	7	8	9

besondere Zeichen gegeben und fügt noch die

Null
0

als Zeichen des Nichtvorhandenseins von Einheiten einer bestimmten Ordnung hinzu.

Die Zahl „zehn", welche entsteht, wenn zu der Neun noch eine Einheit hinzutritt, wird alsdann bezeichnet, indem eine 1 mit einer 0 zur Rechten geschrieben wird, und so schreibt man allgemein jede Zahl nach dem Principe, daß jede Einheit, die weiter gegen links steht, das Zehnfache der ihr rechts zunächst stehenden bedeutet. Man nennt dieses Zahlensystem das decadische.

§. 9.

In jedem Zahlensysteme giebt es demnach verschiedene Ordnungen von Zahlen. Im decadischen Systeme haben dieselben die Namen: Einer, Zehner, Hunderter, Tausender u. s. w.

Von welcher Ordnung eine Zahl ist, wird auch wohl durch Ordnungszahlen, Indices, bezeichnet, die man über die Ziffern schreibt, wobei man der Grundordnung der Einer aus Gründen, die hier noch nicht entwickelt werden können, den Index 0 gegeben hat.

Es ist also

$\overset{2}{3}$ so viel als 300,

$\overset{4\,2\,0}{751}$ so viel als 70501,

$\overset{3\,2\,1\,0}{1259}$ so viel als 1259.

Es ist zu bemerken, daß die Benennung der Zahlen von der 9ten Ordnung an bei den südlichen Völkern (Franzosen, Italiener, Spanier, Portugiesen) von der der nordischen Völker (Deutsche, Engländer, Schweden) abweicht. Denn während bei beiden noch

$\overset{6}{1}$ eine Million

heißt, so nennen wir

$\overset{9}{1}$ tausend Million,

$\overset{12}{1}$ eine Billion,

$\overset{18}{1}$ eine Trillion u. s. w.

Die Franzosen hingegen nennen schon

$\overset{9}{1}$ eine Billion,

$\overset{12}{1}$ eine Trillion,

$\overset{18}{1}$ eine Quintillion u. s. w.

§. 10.

Erfinder des decadischen Zahlensystems waren ohne Zweifel die Indier, von denen es die Araber erhielten, und durch diese kam es zu den Europäern. Das erste bekannte lateinische Manuscript, in welchem dasselbe gebraucht ist, rührt vom Jahre 1134 her und ist eine Uebersetzung aus dem Arabischen von einem gelehrten Juden,

Abraham Savacorda aus Barcelona. Der erste christliche Schriftsteller, der das decadische Zahlensystem benutzte, scheint ein Kaufmann aus Pisa gewesen zu sein: Leonardus filius Bonacci, woraus durch Zusammenziehung Fibonacci. Dessen „abbacus" 1202.

Anmerkung 1. Ueber die Einführung des decadischen Zahlensystems vergl. Libri, Histoire des Mathématiques en Italie, Tome II.

Anmerkung 2. Die Rechnung mit den decadischen Ziffern wurde im Mittelalter Algorithmus genannt, durch Zusammensetzung aus dem arabischen Artikel Al und dem griechischen Worte ἄριθμος. So z. B. Opusculum de praxi numerorum quod algorismum vocant aus dem 13. Jahrhundert (?), herausgegeben von Jodocus Clichtovāus, 1508. Georg Purbach (geb. 1423, gest. 1461), Algorithmus de numeris integris, fractis, regulis communibus et de proportionibus. Bei den Neueren wird Algorithmus für jede Art von Rechnungsmechanismus gebraucht.

§. 11.

Von anderen Zahlensystemen als das decadische, welche bei verschiedenen Völkern und zu verschiedenen Zeiten sich finden, sind folgende zu erwähnen:

Die Dyadik mit der Grundzahl zwei scheint bei den Chinesen gebräuchlich gewesen zu sein. Johannes Caramuel, Bischof von Campagna: Mathesis biceps vetus et nova, Campaniae 1670, fol. Leibnitz in einem Briefe an den Herzog von Braunschweig 1697 und in einer Abhandlung: Arithmétique binaire in den Mémoires de l'académie des sciences, année 1703. Brander, Arithmetica dyadica, Augsburg 1769 und 1775.

Die Tetraktik mit der Grundzahl vier war nach Aristoteles bei einem thracischen Volke gebräuchlich. Erhard Weigel, Aretologistica vel logistica virtutum genitrix, Norimbergae 1687 und Tetractys, summum tum arithmeticae tum philosophiae discursivae compendium; artis magnae sciendi gemina radix, Jenae 1672.

Die Dodekadik mit der Grundzahl zwölf soll in einem maldivischen Sprachidiom vorkommen. Werneburg, Teliosadik 1800 und: Lehrbuch der Arithmetik in bestimmten und unbestimmten Zahlen

oder Größen, Jena 1819. Er bezeichnet die Zahl zehn durch ε; eilf (bei ihm mör genannt) durch ϱ; zwölf heißt bei ihm taun u. s. w. Horstig, das arithmetische Duodecimalsystem von seiner praktischen Seite dargestellt, Leipzig 1801.

Anmerkung. Einen wichtigen Aufsatz über Zahlensysteme von Alexander von Humboldt vergl. im IV. Bande von Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik: sowie einen anderen von Gergonne im XXI. Bande von Gergonne, annales des mathématiques pures et appliquées.

Von der Addition.

§. 12.

Ist der erste Akt der Arithmetik, das Zählen vollendet, so kann man leicht zwei verschiedene Male zählen und beide Zahlen zu einer Zahl zusammenfassen. Es ist dieses die erste Operation, die Addition.

Addiren heißt nämlich Nichts anderes als: von einer gegebenen Zahl aus in der natürlichen Zahlenreihe um so viele Schritte fortgehen, als eine andere gegebene Zahl vorschreibt.

Das Resultat dieser Operation heißt die Summe, die Zahl, von welcher aus weiter gezählt wird, der erste Theil, und die Zahl, welche angiebt, wie weit fortgezählt werden soll, der zweite Theil.

§. 13.

Das Zeichen der Addition ist + plus. Also 3 + 4 giebt die Summe 7, ist gleich 7, oder wenn man das Zeichen = für gleich benutzt:

$$3 + 4 = 7.$$

Damit ist keine neue Wahrheit gegeben, sondern nur eine lexicalische Erklärung. Wir nennen eben die Zahl 7, die durch Ver-

einigung von 3 und 4 entsteht. Allgemeiner wird der Ausdruck, wenn statt der Zahlzeichen Buchstaben gebraucht werden, deren Bedeutung unbestimmt ist. Also

$$a + b = (a + b)$$

unter Anwendung der Klammern, um anzugeben, daß eine mehrtheilige Größe als eine eintheilige betrachtet werden soll.

Anmerkung 1. Das Gleichheitszeichen $=$ wurde von Robert Recorde eingeführt. The whetstone of witte, which is the seconde part of arithmetike: containing the extraction of rootes; the cossike praktise with the rule of equation: and the workes of surde numbers 1557. Descartes und seine französische Zeitgenossen bedienten sich des jetzt nicht mehr gebräuchlichen Gleichheitszeichens ∞. Ein jeder Ausdruck, in welchem das Gleichheitszeichen vorkommt, wird eine Gleichung genannt.

Anmerkung 2. Die Klammern wurden in der angegebenen Bedeutung zuerst von Albert Girard gebraucht: Invention nouvelle en l'algèbre tant pour la solution des équations que pour recoignoistre le nombre des solutions qu'elles reçoivent avec plusieurs choses qui sont nécessaires à la perfection de ceste divine science, à Amsterdam 1629.

§. 14.

Der erste Satz, der bei der Addition auftritt, heißt:

die Ordnung des Zusammenzählens ist gleichgültig,

oder in Zeichen:

$$a + b = b + a.$$

Dieser Satz pflegt häufig als Grundsatz angesehen zu werden, Man kann ihn indessen streng beweisen, wenn man einen anderen, einfacheren Grundsatz annimmt:

den Grundsatz, daß dieselbe Summe erscheinen muß, ob man einen Theil so zum anderen addirt, daß man lauter einfache Schritte thut, oder ob man mehrere Schritte in eine Zahl zusammenfaßt.

Es muß z. B., weil $3 + 4 = 7$ ist, einerlei sein, ob ich um sieben Einheiten weiterzähle, oder ob ich die drei ersten dieser Einheiten zusammenfasse und dann auch die vier letzten. Die Summe

$$9 + 7$$

kann daher entweder durch die Operation:

$$9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16$$

gefunden werden; oder durch die beiden Operationen:

$$9,\ 10,\ 11,\ 12 \text{ und } 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16.$$

§. 15.

Nach dieser Vorbemerkung läßt sich leicht zeigen, daß z. B.

$$9 + 7 = 7 + 9$$

ist. Denn wir denken uns die größere Zahl 9 als aus zwei Theilen zusammengesetzt, von welchen der eine gleich der kleineren Zahl 7 angenommen wird, der zweite aber gefunden wird, wenn man von 7 bis 9 zählt und sich die Zahl 2 der nöthigen Schritte merkt. So ist also:

$$9 = (7 + 2).$$

Daher ergiebt sich nach dem Grundsatze des vorigen Paragraphs

$$9 + 7 = 7 + 2 + 7$$
$$7 + 9 = 7 + 7 + 2.$$

Wäre also bekannt, daß

$$2 + 7 = 7 + 2,$$

so wäre damit bewiesen, daß

$$9 + 7 = 7 + 9.$$

Dieses Criterium ist freilich selbst noch zu beweisen und ein dem zu Anfange aufgestellten analoger Satz, unterscheidet sich aber von demselben dadurch, daß kleinere Zahlen in demselben vorkommen.

Durch ähnliche Schlußweise machen wir seine Wahrheit wieder von der eines analogen Satzes mit noch kleineren Zahlen abhängig.

Denn wir setzen:

$$7 = (2 + 5)$$

und finden dadurch:

$$2 + 7 = 2 + 2 + 5$$
$$7 + 2 = 2 + 5 + 2.$$

Folglich ist noch zu beweisen:

$$2 + 5 = 5 + 2.$$

Aber weil:

$$5 = (2 + 3)$$

so ist:

$$2 + 5 = 2 + 2 + 3$$
$$5 + 2 = 2 + 3 + 2.$$

Und es ist zu beweisen, daß

$$2 + 3 = 3 + 2.$$

Immer durch dieselbe Methode ergiebt sich:

$$3 = (2 + 1)$$
$$2 + 3 = 2 + 2 + 1$$
$$3 + 2 = 2 + 1 + 2,$$

wodurch die Wahrheit unseres Satzes nur noch davon abhängt, daß

$$2 + 1 = 1 + 2.$$

Aber

$$2 = (1 + 1)$$

Also:

$$2 + 1 = 1 + 1 + 1$$
$$1 + 2 = 1 + 1 + 1.$$

Diese beiden Bildungsweisen sind in der That identisch; es ist wirklich

$$2 + 1 = 1 + 2$$

und damit auch

$$9 + 7 = 7 + 9.$$

Derselbe Gang, der hier eingeschlagen wurde, führt auch bei jedem anderen Beispiele zu dem Ziele, daß zuletzt zwei ganz identische Bildungen auftreten. Wäre etwa noch

$$8 + 6 = 6 + 8$$

zu beweisen, so würden es folgende Sätze sein, auf die man nach und nach geführt würde:

$$2 + 6 = 6 + 2$$
$$4 + 2 = 2 + 4$$
$$2 + 2 + 2 = 2 + 2 + 2.$$

Und ähnlich verhält es sich bei allen möglichen Zahlen.

§. 16.

Um den allgemeinen Beweis zu liefern, wollen wir uns der Buchstaben bedienen, die wir schon oben benutzten. Es soll nämlich gezeigt werden, daß

$$a + b = b + a$$

wo a und b alle mögliche Zahlen, welche man nur immer will, bezeichnen können.

Jedenfalls können wir uns die beiden Zahlen a, b als ungleich denken, weil sonst der zu beweisende Satz in einer augenscheinlichen Identität bestände. Es sei daher etwa a die größere Zahl, welche als Summe der beiden Theile b + c gedacht wird, deren einer der kleineren Zahl b gleich ist.

Mithin ist:

$$a + b = b + c + b$$
$$b + a = b + b + c$$

und es ist

$$a + b = b + a$$

wenn

$$c + b = b + c.$$

Hierbei ist b unverändert geblieben, während c kleiner als a ist.

Bei der Wiederholung desselben Verfahrens wird die Wahrheit des Satzes a + b = b + a von einem neuen ähnlichen Satze abhängig gemacht, in welchem die kleinere der beiden Zahlen b, c vorkommt und eine neue Zahl d, welche kleiner als die größere jener beiden Zahlen ist.

So bleibt immer die kleinere Zahl unverändert, die größere wird herabgesetzt.

Da aber jede noch so große Zahl nicht unbegrenzt oft kleiner gemacht werden kann, weil es nur eine bestimmte Anzahl von Zahlen giebt, welche überhaupt kleiner sind als sie, so muß endlich eine Bedingungsgleichung hervortreten, in welcher die beiden Ausdrücke identisch sind. Also wie in den Zahlenbeispielen des vorigen Paragraphs

$$1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1$$
$$2 + 2 + 2 = 2 + 2 + 2$$

so allgemeiner

$$n + n + n = n + n + n.$$

Davon ist aber die Wahrheit augenscheinlich und somit finden auch alle vorhergehenden Gleichungen statt, und es ist in der That immer:

$$a + b = b + a.$$

§. 17.

Ebenso wie wir zwei Zahlen durch Addition zu einer dritten vereinigten, können wir auch die Summe von drei, vier, von beliebig vielen Zahlen bilden, und auch hier ist Verwechslung der einzelnen Theile in jeder beliebigen Ordnung erlaubt.

Wollten wir z. B. beweisen, daß

$$a + b + c + d = c + a + d + b,$$

so könnte folgender Gang eingeschlagen werden.

Es ist zunächst:

$$a + b + c + d = (a + b) + (c + d),$$
$$(a + b) + (c + d) = (c + d) + (a + b).$$

Also:

$$a + b + c + d = c + d + a + b = c + (d + a) + b.$$

Ferner ist:

$$d + a = a + d.$$

Folglich:

$$a + b + c + d = c + a + d + b.$$

§. 18.

Auf diesem Satze der Verwechselbarkeit der Theile beruht das gewöhnliche Additionsverfahren bei größeren Zahlen, indem die Theile von gleicher Ordnung abgesondert und für sich zusammengefaßt werden. Beträgt alsdann die Summe von Ziffern irgend einer Ordnung mehr als „neun", so werden die Zehner derselben als Einer der nächsthöheren Ordnung betrachtet.

Z. B. bei der Addition 1774 + 365 + 17 + 8291 ist das Verfahren:

$$\left(\overset{0}{4} + \overset{0}{5} + \overset{0}{7} + \overset{0}{1}\right) + \left(\overset{1}{7} + \overset{1}{6} + \overset{1}{1} + \overset{1}{9}\right) + \left(\overset{2}{7} + \overset{2}{3} + \overset{2}{2}\right) + \left(\overset{3}{1} + \overset{3}{8}\right)$$
$$= \overset{0}{7} + \overset{1}{1} + \overset{1}{3} + \overset{2}{2} + \overset{2}{2} + \overset{3}{1} + \overset{3}{9} = \overset{0}{7} + \overset{1}{4} + \overset{2}{4} + \overset{4}{1} = 10447.$$

Bei der Addition von Buchstabenausdrücken findet eine Vereinfachung dadurch statt, daß man den Buchstaben noch Zahlen versetzt, welche andeuten, wie oft der betreffende Buchstabe als Theil vorkommt. Diese Zahlen nennt man alsdann Coefficienten.

Z. B.: $a + b + a + a + d + b + a + b + b + a = 5a + 4b + d.$

Anmerkung. Der Name „Coefficient" rührt von Vieta her.

Von der Subtraction.

§. 19.

Schon bei dem Beweise des Satzes $a + b = b + a$ haben wir eigentlich vorgegriffen und sind schon auf die nächstfolgende Operation eingegangen. Wie nämlich Theile durch Addition zusammengesetzt werden, so sagten wir, muß es auch umgekehrt möglich sein, einen solchen Zusammenhang wieder aufzulösen, und während eine Summe und einer ihrer Theile gegeben ist, den anderen Theil derselben zu finden. Die Operation, welche dazu dient, heißt Subtraction. Das Zeichen der Subtraction ist — minus, welches zwischen die Summe und den gegebenen Theil gesetzt wird.

Anmerkung. Die beiden Zeichen (+ —) sind deutschen Ursprunges. Sie finden sich zuerst in der 1524 gedruckten „Coß" von Christoph Rudolph aus Jauer und in der Arithmetica integra von Michael Stifel aus Eßlingen (Norimbergae 1544). Die Italiener, welche vorher hauptsächlich die Arithmetik förderten, benutzten die Buchstaben p (piu) und m (meno) nach dem Vorgange von Lucas Pacciolo, auch Frater Lucas de Burgo sancti sepulcri genannt. Dessen Summa de Arithmetica Geometria Proportioni e Proportionalita, Vinegia 1494 fol.

§. 20.

Bei der Subtraction erhalten die einzelnen Zahlen, an welchen die Operation vorgenommen wird, neue Namen. Denken wir uns nämlich eine gegebene Zahl als Summe aus einer zweiten gegebenen Zahl und einer dritten gesuchten, so heißt der gegebene Theil Subtrahend, der gesuchte Differenz; die Summe wird in diesem Falle Minuend genannt.

Die Differenz zum Subtrahenden addirt muß daher den Minuenden wieder hervorbringen.

Oder mit anderen Worten: Jede Zahl bleibt durch Addition und Subtraction einer und derselben Zahl unverändert.

Ist nämlich a der Minuend, b der Subtrahend, so ist a — b die Differenz und

$$a - b + b = a.$$

§. 21.

Das Verfahren, um die Differenz zweier Zahlen zu finden, ist ein zweifaches, was darauf beruht, daß bei der Addition, wie wir bewiesen haben, die Theile verwechselt werden können, daß also der Subtrahend sowohl als erster als zweiter Theil der Summe betrachtet werden kann.

Betrachten wir den Subtrahenden als ersten Theil, so suchen wir die Anzahl der Schritte, nach welchen wir vom ersten Theile zur Summe gelangen werden; wir zählen also vom Subtrahenden weiter bis wir den Minuend erhalten und merken uns die Anzahl der Schritte.

Z. B. 17 — 11 zu finden zählen wir: 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, giebt 6 Schritte, also 17 — 11 = 6.

Betrachten wir hingegen den Subtrahenden als zweiten Theil, so suchen wir die Zahl, von welcher aus eine gegebene Anzahl Schritte nöthig ist, um zu einer gegebenen Summe zu gelangen; wir gehen daher von dem Minuenden so viele Schritte rückwärts, als der Subtrahend angiebt und merken uns die Zahl, bei der wir stehen bleiben.

Z. B. 17 — 11 zu finden zählen wir: 17, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, also 17 — 11 = 6.

In der Praxis verschwimmen freilich die Methoden zu dem Bewußtsein 17 — 11 = 6, ohne daß es uns klar ist, wie wir zu diesem Resultate gelangen.

§. 22.

Ist eine mehrtheilige Größe zu subtrahiren, so muß es nach dem im §. 14 ausgesprochenen Grundsatze gleichgültig sein, ob wir sie auf einmal abzählen oder in Theilen. Verbinden wir damit die Verwechselbarkeit der Theile, so erhalten wir die Regel für das Zahlensubtrahiren, daß man die Ziffern von gleich hoher Ordnung einzeln abzieht, also die Einer von den Einern, die Zehner vor Zehnern u. s. w.

Betragen die Einheiten irgend einer Ordnung des Subtrahenden mehr als die derselben Ordnung des Minuenden, so kann man sich auf doppelte Weise helfen: Entweder man borgt eine Einheit der nächsthöheren Ordnung des Minuenden und läßt den Subtrahend unverändert:

$$\text{z. B.: } 1823 - 944 = \overset{3}{1} + \left(\overset{2}{8} - \overset{2}{9}\right) + \left(\overset{1}{2} - \overset{1}{4}\right) + \left(\overset{0}{3} - \overset{0}{4}\right) = \left(\overset{2}{17} - \overset{2}{9}\right) + \left(\overset{1}{11} - \overset{1}{4}\right) + \left(\overset{0}{13} - \overset{0}{4}\right) = 879.$$

Oder, was in der Praxis sich vortheilhafter zeigt, man vermehrt den Minuend um 10 der in Rede stehenden, den Subtrahend um 1 der nächsthöheren Ordnung, was nach §. 20 gestattet sein muß.

$$\text{z. B.: } 1823 - 944 = \left(\overset{3}{1} - \overset{3}{1}\right) + \left(\overset{2}{8} - \overset{2}{0}\right) + \left(\overset{1}{12} - \overset{1}{5}\right) + \left(\overset{0}{13} - \overset{0}{4}\right) = 879.$$

Sind Ziffern derselben Ordnung im Minuend und Subtrahend einander gleich, so heben sie sich bei der Subtraction auf, und in der Differenz erscheint eine Null als Zeichen dieses Nichtmehrvorhandenseins von Einheiten der betreffenden Ordnung.

z. B.: $17321 - 14311 = 3010.$

Bei der Subtraction von Buchstabenausdrücken ist ähnlich wie bei der Addition auf die Coefficienten Rücksicht zu nehmen.

z. B.: $(8a + 5b + 10c + d) - (3a + 5b + 6c) = 5a + 4c + d.$

Von den entgegengesetzten Größen.

---

§. 23.

Beim Vergleiche der Addition mit der Subtraction zeigt sich ein wesentlicher Unterschied. Die Addition kann unbeschränkt ausgeführt werden, die Subtraction vorläufig noch nicht.

Die Differenz $a - b$ bedeutet nämlich eine Zahl, die zum Subtrahenden b hinzuaddirt den Minuend a als Summe giebt. Dieses hat einen Sinn, so lange a größer ist als b; wird aber umgekehrt b größer als a, so entsteht von unserem Standpunkte

aus eine Schwierigkeit, indem wir gewohnt sind, durch Hinzutreten einer neuen Zahl eine Zahl vergrößert zu sehen, während sie hier eben dadurch verkleinert werden soll. Die hinzutretende Größe soll von der vorhandenen Etwas aufheben.

Um den scheinbaren Widerspruch dieser Forderung zu lösen, sehen wir uns genöthigt, wie §. 4 schon angekündigt wurde, die Abstraction, vermittelst deren wir zum Begriffe der Zahl gelangen, nicht mehr so vollständig sein zu lassen, und außer der Eigenschaft der Vielheit der Dinge noch eine andere Eigenschaft der Körperwelt in den Begriff der Zahl aufzunehmen und in die Arithmetik zu übertragen.

Diese Eigenschaft ist aber der Gegensatz, welcher am deutlichsten bei Bewegungen als entgegengesetzte Richtung auftritt.

Die absolute Größe des Weges von A nach B (Figur 2) und die des Weges von B nach A ist dieselbe. Sie möge etwa eine Wegeinheit sein. Ebenso soll die Entfernung von B nach C eine Wegeinheit sein. Es wird daher ein Körper, der den Weg von A nach B und wieder zurück nach A beschreibt, absolut eben so viele Wegeinheiten zurückgelegt haben, wie ein Körper, der sich von A bis C bewegt, und doch sind die Resultate der Art verschieden, daß am Ende der Bewegung der eine Körper um zwei Wegeinheiten von der Anfangslage entfernt ist, während der andere, bei dem die Bewegungen einander aufhoben, sich in der Anfangslage selbst befindet.

Eine ähnliche Verschiedenheit der Resultate bei Kräften, die der Größe nach absolut gleich sind, zeigt sich bei der Wage, indem dieselbe im Gleichgewichte sein kann, einen Ausschlag nach rechts oder nach links geben kann, während sie mit denselben Gewichten belastet ist. Es kommt nur auf die Vertheilung der Gewichte in beide Wagschalen an, d. h. also auf die Richtung, in welcher die Kräfte wirken.

§. 24.

Dieser Gegensatz der Richtung, den wir jetzt auch auf die Zahlen übertragen wollen, führt uns daher zu der Annahme von zwei Gruppen von Zahlen, die aus zwei einander entgegengesetzten und sich aufhebenden Einheiten gebildet werden.

Beide sind reelle, wirklich vorhandene Größen, und die eine nicht bloß eine Negation der anderen, wie früher von den Mathematikern angenommen wurde.

Anmerkung. Diese falsche Ansicht findet sich am Schärfsten bei Chr. Wolf: Sunt adeo quantitates privativae verarum, per quas intelligentur, defectus; consequenter non quantitates verae. (Elementa Matheseos universae, Genevae 1752. Tom. I, pag. 237.)

§. 25.

Für die beiden Einheiten müssen wir verschiedene Bezeichnungen und Namen haben. Die eine möge durch ($\rightarrow$ 1) dargestellt werden, die andere durch ($\leftarrow$ 1). Erstere nennen wir die positive Einheit, letztere die negative Einheit.

Unter den Zeichen $\rightarrow$, $\leftarrow$ hat man sich natürlich keine Rechnungsoperationen zu denken, sondern bloß eine Eigenschaft der Zahlen, die denn auch, nachdem sie mit den angegebenen Zeichen behaftet sind, algebraische Zahlen genannt werden, zum Unterschiede von der absoluten Zahl, die wir vorher betrachteten und die nur den Begriff der Vielheit, nicht auch den der Richtung in sich schließt.

Welche Gruppe von Zahlen man positiv und welche man negativ nennen will, ist an und für sich gleichgültig, nur muß man nach einmal getroffener Bestimmung dabei bleiben.

In der Regel nennt man die Zahlen positiv, welche am häufigsten bei den anzustellenden Rechnungsoperationen vorkommen.

Anmerkung. Die Benennungen „positiv" und „negativ" rühren von Vieta her.

Die Zeichen $\rightarrow$ und $\leftarrow$, welche eine Richtung andeuten, kann man passend Richtungscoefficienten nennen.

§. 26.

Vermittelst dieses neuen Begriffes von entgegengesetzten Zahlen läßt sich nun die Subtraction allgemein ausführen.

Haben wir etwa eine positive Zahl ($\rightarrow$ a) und eine andere gleichfalls positive aber größere Zahl ($\rightarrow$ a + b), und letztere soll von ersterer abgezogen werden, so heißt das, es soll eine Zahl ge-

funden werden, welche zu $(\rightarrow a + b)$ hinzugefügt $(\rightarrow a)$ liefert, also $(\rightarrow b)$ aufhebt. Diese Zahl ist aber $(\leftarrow b)$.

Demnach ist:

$$(\rightarrow a) - (\rightarrow a + b) = (\leftarrow b).$$

Wir können die entgegengesetzte Zahl auch in dem Bilde der Zahlenlinie leicht darstellen. Zu dieser Versinnlichung gelangen wir am Einfachsten, indem wir den Subtrahenden als zweiten Theil betrachten (§. 21), d. h. also vom Minuenden so viele Schritte rückwärts, oder in entgegengesetzter Richtung wie bei der Addition gehen, als der Subtrahend anzeigt. Ist nun der Subtrahend größer als der Minuend, so gelangt man zum Anfangspunkt der Zahlenlinie, ehe die nöthige Anzahl von Schritten vollendet ist. Um daher ein Bild von der ganzen Operation zu haben, wird man die Zahlenlinie auch jenseits jenes Anfangspunktes fortsetzen müssen. Der Anfangspunkt selbst, in welchem beide Richtungen ihre sich aufhebende Vereinigung haben, wird mit 0 zu bezeichnen sein, die links von demselben liegenden Längen mit $\leftarrow 1$, $\leftarrow 2$, $\leftarrow 3 \ldots$ während die rechts liegenden Längen $\rightarrow 1$, $\rightarrow 2$, $\rightarrow 3 \ldots$ heißen (Figur 3).

Statt einer einseitig unendlichen Zahlenreihe erhalten wir eine nach beiden Seiten unendliche.

§. 27.

Die Ausführung der bisherigen Operationen der Addition und Subtraction an algebraischen Zahlen hat jetzt keine weitere Schwierigkeit.

Bei der Addition werden gleichartige Größen einander vermehren, entgegengesetzte einander aufheben.

Z. B.: $(\rightarrow 3) + (\rightarrow 7) = (\rightarrow 10)$

$(\leftarrow 3) + (\leftarrow 7) = (\leftarrow 10)$

$(\rightarrow 3) + (\leftarrow 7) = (\leftarrow 4)$

$(\leftarrow 3) + (\rightarrow 7) = (\rightarrow 4)$.

Bei der Subtraction gehen wir von der Definition aus, daß vom Minuenden die Schritte des Subtrahenden in entgegengesetzter Richtung zu zählen sind.

Die Subtraction läßt sich daher immer in eine Addition verwandeln, indem der Subtrahend im entgegengesetzten Sinne genommen wird.

Z. B.: $(\rightarrow 7) - (\rightarrow 3) = (\rightarrow 7) + (\leftarrow 3) = (\rightarrow 4)$

$(\leftarrow 7) - (\leftarrow 3) = (\leftarrow 7) + (\rightarrow 3) = (\leftarrow 4)$

$(\rightarrow 7) - (\leftarrow 3) = (\rightarrow 7) + (\rightarrow 3) = (\rightarrow 10)$

$(\leftarrow 7) - (\rightarrow 3) = (\leftarrow 7) + (\leftarrow 3) = (\leftarrow 10).$

Diese Bezeichnung hat etwas Schwerfälliges. Einfacher wird sie, wenn die Operationszeichen +, — weggelassen werden, nachdem die Subtractionen nach dem Obigen immer in Additionen umgewandelt sind, worauf auch die Klammern wegbleiben können. Das bloße Nebeneinanderschreiben der Zahlen mit ihren Richtungscoefficienten bedeutet alsdann eine Addition derselben, deren Resultat eine *algebraische Summe* genannt wird.

Z. B.: $\leftarrow 7 \leftarrow 3 \rightarrow 4 \leftarrow 1 \rightarrow 13 = \rightarrow 6.$

In der Regel werden nicht die von uns benutzten Zeichen $\rightarrow$, $\leftarrow$, sondern +, — zu diesem Zwecke verwandt. Um nicht unnöthiger Weise zu viele neue Zeichen in die Mathematik einzuführen, wollen wir gleichfalls in Zukunft uns jener Zeichen bedienen, wobei nochmals erinnert werden muß, daß es jetzt keine Operationszeichen mehr sind, sondern Richtungscoefficienten.

Das frühere Beispiel heißt alsdann:

$$-7 - 3 + 4 - 11 + 13 = +6.$$

Ist die erste Zahl positiv, so läßt man das + gewöhnlich weg und schreibt nur $6 = +6$.

§. 28.

Das kurz zusammengefaßte Resultat der angestellten Betrachtungen liefert uns folgende Definitionen:

Addiren ist jetzt Nichts anderes, als von einem gegebenen Punkte der Zahlenreihe so viele Schritte und in dem Sinne fortgehen, als eine andere gegebene algebraische Zahl vorschreibt. Subtrahirt hingegen wird eine algebraische Zahl, indem man ihr den entgegengesetzten Richtungscoefficienten beilegt und sie dann addirt. Als selbständige Operation verschwindet demnach die Subtraction.

§. 29.

Was endlich noch die *Null* betrifft, welche nach §. 22 als das einander Aufheben zweier entgegengesetzter Zahlen von gleicher

absoluter Größe betrachtet werden kann, welche also entsteht, wenn eine gleich große Anzahl positiver und negativer Einheiten zusammentritt, so ist aus dieser Definition in Verbindung mit dem Satze, „daß jede Zahl durch Addition und Subtraction einer und derselben Zahl unverändert bleibt" (§. 20), klar, daß sie zu jeder Zahl addirt oder von derselben subtrahirt werden kann, ohne dieselbe zu verändern.

Daraus ferner, daß $0 + 0 = 0$, geht hervor, daß die Null sich selbst entgegengesetzt ist, und also auch in dieser Beziehung mit Recht eine Mittelstellung zwischen den positiven und negativen Zahlen einnimmt.

§. 30.

Eine wichtige Frage bezieht sich auf die Vergleichung positiver und negativer Zahlen in Bezug auf ihre Größe. Man unterscheidet nämlich dabei zwei Arten von Größen: die absolute Größe und die algebraische Größe.

Von zwei Zahlen ist die eine absolut größer als die andere, wenn sie mehr Einheiten ihrer Art enthält.

Z. B. 5 ist absolut größer als -3, absolut kleiner als -7.

Wir nennen aber eine Zahl algebraisch größer als eine andere, wenn die Subtraction der zweiten von der ersten eine positive Differenz giebt.

Z. B.: -5 ist algebraisch größer als -7, algebraisch kleiner als 3.

In diesem letzteren algebraischen Sinne ist es richtig, wenn man sagt, eine negative Zahl sei kleiner als Null, und um so mehr kleiner als jede positive Zahl, was auch ihr absoluter Werth sein mag; von zwei negativen Zahlen wird alsdann diejenige die größere zu nennen sein, welche die wenigsten negativen Einheiten enthält, wo es absolut genommen doch jedenfalls umgekehrt ist.

Zur Bezeichnung der Ungleichheit dient der Winkel $<$ oder $>$, wo die größere Zahl innerhalb der Schenkel, die kleinere an die Spitze zu stehen kommt:

$$3 < 7 \quad , \quad 5 > 2.$$

Ob algebraische oder absolute Ungleichheit gemeint ist, muß jedesmal besonders bemerkt werden.

Anmerkung. Die Zeichen $<$, $>$ rühren von Harriot her. Das sehr brauchbare Zeichen $\leqq$, $\geqq$, um anzugeben, daß von zwei Größen die eine gleich oder kleiner (bezüglich gleich oder größer) als die andere ist, hat Seeber angegeben. (Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen, Freiburg 1831.)

Die Unterscheidung algebraischer und absoluter Ungleichheit findet sich zuerst bei Cauchy, analyse algébrique, pag. 438, Paris 1821.

Von der Multiplication.

§. 31.

Die Zahl entsteht dadurch, daß eine gewisse Menge positiver oder negativer Einheiten zusammengefaßt wird. Wird dieses Zusammenfassen nun dahin ausgedehnt, daß statt der Einheit eine beliebige gegebene Zahl genommen wird, so nennt man diese Operation Multiplication.

Die Zahl, welche statt der Einheit substituirt wird, heißt der Multiplicandus: die Zahl, welche das Gesetz der Bildung vorschreibt, der Multiplicator; die Zahl, zu welcher man als Resultat gelangt, das Product.

§. 32.

Demnach gilt folgende Definition:

Multipliciren heißt: so wie der Multiplicator aus der positiven Einheit gebildet worden, eine neue Zahl, das Product, aus dem Multiplicandus bilden.

Oder mit anderen Worten: Es findet dasselbe Verhältniß zwischen der positiven Einheit und dem Multiplicator statt, wie zwischen dem Multiplicandus und dem Producte.

§. 33.

Von den verschiedenen Bezeichnungen der Multiplication findet sich das verschobene Kreuz $\times$ zuerst bei Oughtred (geb. 1573, gest. 1660): clavis mathematicae denuo limata, Oxoniae 1631. Harriot deutete die Multiplication von Buchstaben dadurch an, daß er sie bloß neben einander setzte, eine Schreibart, die auch jetzt noch bei Weitem die häufigste ist. Christian Wolf führte den Gebrauch eines Punktes als Multiplicationszeichen ein. Die Multiplication der beiden Zahlen a, b wird daher angedeutet durch:

$$a \times b = a\,b \times a\,.\,b.$$

Noch eine andere Bezeichnung geht aus der zweiten Definition hervor. Nämlich:

$$1 : a :: b : a \times b,$$

wie Oughtred und nach ihm alle Engländer und viele Franzosen bis auf die neueste Zeit schrieben, oder:

$$1 : a = b : a\,.\,b,$$

wie Wolf und nach ihm die Deutschen schreiben.

Man nennt den so geschriebenen Ausdruck eine Proportion und spricht ihn folgendermaßen aus: „die Einheit verhält sich zu a wie b sich zu dem Producte a . b verhält.

§. 34.

Die Multiplication zweier positiver Zahlen unterliegt keiner Schwierigkeit, indem die Multiplication hier zu einer Addition von gleichen Theilen wird. Das Product von $a \times b$ erhält man nämlich definitionsgemäß auf folgende Weise: „a ist aus der positiven Einheit entstanden, indem ich sie amal setzte, folglich muß ich auch b jetzt amal setzen" und finde:

$$a \times b = b + b + b + \ldots (a\text{mal}) = a\,b.$$

Mehr als diese Andeutung kann natürlich bei Buchstaben nicht erzielt werden, ebenso wie man sich auch bei der Addition und Subtraction mit der Andeutung begnügen mußte. Ist in Zahlen etwa $a = 3$, $b = 4$, so heißt das Beispiel:

$$3 \times 4 = 4 + 4 + 4 = 12.$$

Ist der Multiplicator positiv, der Multiplicandus negativ, $(a \times - b)$, so ist gleichfalls nur eine Addition vorzunehmen. Denn

„a ist aus der positiven Einheit entstanden, indem ich sie amal setzte, folglich muß ich auch — b jetzt amal setzen.“

$$a \times - b = - b - b - b - \ldots (a\text{mal}) = - a b.$$
$$3 \times - 4 = - 4 - 4 - 4 = - 12.$$

Ist der Multiplicator negativ, der Multiplicandus positiv, so ist die Multiplication $- a \times b$ so aufzufassen: „— a ist aus der positiven Einheit entstanden, indem ich sie in entgegengesetzter Richtung amal setzte, folglich muß ich auch von b zu der entgegengesetzten Zahl — b übergehen und diese amal setzen.“

$$- a \times b = - b - b - b - \ldots (a\text{mal}) = - a b.$$
$$- 3 \times 4 = - 4 - 4 - 4 = - 12.$$

Sind endlich Multiplicator und Multiplicandus beide negativ $- a \times - b$, so „ist — a aus der positiven Einheit entstanden, indem ich sie in entgegengesetzter Richtung amal setzte, folglich muß ich auch von — b zu der entgegengesetzten Zahl + b oder b übergehen und diese amal setzen“:

$$- a \times - b = b + b + b + \ldots (a\text{mal}) = a b.$$
$$- 3 \times - 4 = 4 + 4 + 4 = 12.$$

§. 35.

Betrachten wir nun die vier Resultate:

$$a \times b = a b \quad , \quad 3 \times 4 = 12,$$
$$a \times - b = a b \quad , \quad 3 \times - 4 = - 12,$$
$$- a \times b = - a b \quad , \quad - 3 \times 4 = - 12,$$
$$- a \times - b = a b \quad , \quad - 3 \times - 4 = 12,$$

so finden wir folgende Regel: Wir multipliciren zunächst die beiden Zahlen ganz absolut und geben dem Producte das positive oder das negative Zeichen, je nachdem Multiplicator und Multiplicandus dasselbe Zeichen führen oder entgegengesetzte.

In Zeichen geschrieben:

$$\pm a \times \pm b = a b,$$
$$\pm a \times \mp b = - a b.$$

Jede Multiplication besteht daher aus zwei Operationen, deren eine als Multiplication der Zahlen, die andere als Multiplication der Richtungscoefficienten bezeichnet werden kann.

§. 36.

Zur Multiplication der absoluten Zahlen führen wir auch die Addition nicht mehr aus, sondern bedienen uns dazu des sogenannten *Einmaleins*, d. h. einer Tabelle, in welcher die Multiplicationen sämmtlicher einziffriger Zahlen im Voraus berechnet sind. Bei älteren Mathematikern führt das Einmaleins auch wohl den Namen der *pythagoräischen Tafel* nach der apogryphen Meinung, als rühre dieselbe von den Pythagoräern her. *Das Product zweier Zahlen höherer Ordnung wird gefunden, indem man dem Producte der beiden als Einer betrachteten Zahlen die Ordnung beilegt, welche der Summe der Ordnungen beider Zahlen gleich ist.* Der Beweis dieser Regel liegt in der Definition der Multiplication.

Z. B.: $\overset{4}{2} \times \overset{3}{4} = \overset{7}{8}$,

$\overset{1}{5} \times \overset{0}{7} = \overset{1}{35} = \overset{2\,1}{35}.$

§. 37.

Wir haben noch die Fälle zu berücksichtigen, in denen die Null mit einer gegebenen Zahl multiplicirt werden soll, also:

$a \times 0 \quad , \quad -a \times 0 \quad , \quad 0 \times \pm b.$

Im ersten Falle sind a Nullen zusammenzufassen; deren Summe ist Null. Im zweiten Falle ist amal das Entgegengesetzte der Null zu nehmen, oder da die Null sich selbst entgegengesetzt ist (§. 29), wieder a Nullen, was gleichfalls Null giebt. Bei dem dritten Falle, wo die Null Multiplicator ist, ist die Frage zu stellen, wie sie aus der positiven Einheit entstanden ist. Darauf dient die Antwort: dadurch, daß wir die positive Einheit und die ihr entgegengesetzte negative Einheit in eine Summe zusammenfassen $(1 - 1 = 0)$. Folglich ist hier die Zahl $\pm b$ und die ihr entgegengesetzte Zahl $\mp b$ in eine Summe zusammenzufassen oder $0 \times \pm b = \pm b \mp b = 0$.

Jede Multiplication einer gegebenen Zahl mit Null liefert daher Null zum Producte.

§. 38.

Wenn gleich bei der Multiplication von Buchstabenausdrücken, abgesehen von den Richtungscoefficienten und den allenfallsigen

Zahlencoefficienten, bei welchen nach den früheren Regeln verfahren wird, nur eine Andeutung der Operation stattfinden kann, so ist es wenigstens für manche Fälle doch möglich, eine abgekürzte Schreibart eintreten zu lassen. Sind nämlich zwei gleiche Zahlen mit einander zu multipliciren, so wird das Product dadurch bezeichnet, daß man das Zahlensymbol nur einmal hinschreibt und zur Rechten erhöht die Zahl 2 anmerkt. Z. B.:

$$a \times a = a^2.$$

Es ist selbstverständlich, daß jedes Product wieder als Multiplicator oder Multiplicandus einer neuen Multiplication auftreten kann, so daß Multiplicationen von beliebig vielen Zahlen in einander vorkommen können. Sind diese Zahlen unter einander gleich (etwa k an der Zahl und jede gleich a), so wird das Product in ähnlich abgekürzter Weise

$$a^k$$

geschrieben und a **hoch** k ausgesprochen.

§. 39.

Bei der Multiplication zusammengesetzter Ausdrücke (z. B. mehrziffriger Zahlen) geht man von dem Principe aus, daß es gleichgültig sein muß, ob man einen Ausdruck im Ganzen aus der Einheit entstehen läßt oder in Theilen (§. 14). Man hat demnach den Multiplicandus mit den einzelnen Theilen des Multiplicators zu multipliciren und die Theilproducte in eine Summe zusammenzufassen.

§. 40.

Ueber die Ziffernzahl zweier oder mehrerer nach dem decadischen Systeme geschriebenen Zahlen lassen sich einige für die Folge sehr wichtige Sätze aussprechen.

Ist nämlich eine m ziffrige Zahl M mit einer n ziffrigen Zahl N zu multipliciren, so ist jedenfalls

$$M \geqq \overset{m-1}{1}$$

$$N \geqq \overset{n-1}{1}$$

$$M \times N \geqq \overset{m+n-2}{1}$$

Andererseits ist aber

$$M < \overset{m}{1}$$

$$N < \overset{n}{1}$$

$$M \times N < \overset{m+n}{1}$$

Nun ist $\overset{m+n-2}{1}$ die kleinste $m+n-1$ziffrige Zahl, ferner $\overset{m+n}{1}$ die kleinste $m+n+1$ziffrige Zahl. Folglich kann das Product $M \times N$ wenigstens $m+n-1$, höchstens $m+n$ Ziffern haben.

Ganz ebenso läßt sich beweisen, daß wenn r Zahlen Z_1, Z_2, Z_3, ... Z_r gegeben sind, welche in der Reihenfolge, wie sie genannt sind, z_1, z_2, z_3 ... z_r Ziffern haben, das Product derselben mindestens $z_1 + z_2 + z_3 + .. + z_r - r + 1$ Ziffern haben muß und höchstens $z_1 + z_2 + z_3 + .. + z_r$ Ziffern haben kann.

§. 41.

Bei der Multiplication gilt ein wichtiger Satz, welcher dem Satze der Addition von der Verwechselbarkeit der Theile analog ist. Hier nämlich können Multiplicator und Multiplicandus mit einander vertauscht werden, ohne daß das Product eine Aenderung erfährt.

Wegen der §. 35 angegebenen Regel der Multiplication algebraischer Zahlen ist es genügend, die Wahrheit des Satzes für das Product zweier absoluter Zahlen nachzuweisen, oder zu zeigen, daß

$$a \times b = b \times a.$$

Beide Operationen sind offenbar verschieden. Denn die erstere heißt als Proportion geschrieben:

$$1 : a = b : a \times b,$$

die zweite hingegen:

$$1 : b = a : b \times a.$$

Die erste wird daher das Resultat:

$$a \times b = b + b + \ldots (a\,\text{mal})$$

geben, und die zweite das Resultat:

$$b \times a = a + a + a + \ldots (b\,\text{mal}).$$

Trotz dieser verschiedenen Form ist der Sinn dieser beiden Resultate offenbar derselbe. Denn eben wegen des Fundamentalsatzes der Addition kann das Resultat $b + b + \ldots (a\,\text{mal})$ so umgeändert

werden, daß immer eine Einheit aus jedem b genommen wird, und dieses Verfahren sich bmal wiederholt. Dadurch geht aber die Summe gerade in die andere Form $a + a + a + \ldots$ (bmal) über, und dieselben sind daher einander gleich. Es ist wirklich:

$$a \times h = b \times a.$$

Weil Multiplicator und Multiplicandus der Art verwechselt werden können, führen sie einen gemeinsamen Namen als gleichmäßige Bilder des Productes. Man nennt sie alsdann Factoren.

Anmerkung 1. Der Satz von der Vertauschbarkeit der Factoren läßt sich offenbar auch auf mehr als zwei Factoren ausdehnen. Der Beweis ist ähnlich zu führen, wie bei der Erweiterung des analogen Satzes der Addition (§. 17).

Anmerkung 2. Einen ausführlicheren Beweis der beiden erweiterten Sätze von §. 17 und 41 vergl. Gergonne, Annales des mathématiques pures et appliquées, Tome I, pag, 52.

Von der Division.

§. 42.

Die Addition führte uns dazu, eine Zahl als Summe anzusehen und einen Theil derselben zu suchen. Aehnlicher Weise hat auch die Multiplication ihren Gegensatz in der Division. Diese besteht darin, daß ein Product gegeben ist, welches Dividend genannt wird, so wie ein Factor desselben, der den Namen des Divisors führt, und man sucht den anderen Factor, den Quotienten.

Da z. B. $a \times b = ab$, so können wir uns den Dividenden ab und den Divisor a gegeben, den Quotienten gesucht denken und werden für denselben den Werth b finden.

Bezeichnet wird die Division entweder durch einen Querstrich, über welchen der Dividend und unter welchen der Divisor gesetzt wird:

$$\frac{ab}{a} = b,$$

oder nach Wolf durch einen Doppelpunkt, dem zur Linken der Dividend, zur Rechten der Divisor steht:

$$ab : a = b.$$

§. 43.

Beim Aufsuchen des Quotienten kommt zweierlei in Betracht: erstens sein absoluter Zahlenwerth, zweitens sein Richtungscoefficient.

Um den absoluten Zahlenwerth des Quotienten zu finden, wird man zwei verschiedene Wege einschlagen können, je nachdem man den Divisor als Multiplicandus oder als Multiplicator ansieht; mit anderen Worten, indem der vorläufig unbekannte Quotient durch den Buchstaben x bezeichnet wird, kann man wegen der Vertauschbarkeit der Factoren entweder die Proportion

$$1 : a = x : ab$$

ansetzen, oder die Proportion:

$$1 : x = a : ab.$$

§. 44.

Nach der ersten Auffassungsweise ist eine Zahl x zu suchen, welche amal gesetzt ab liefert. Wir haben dazu kein anderes Mittel, als nach und nach mit den Zahlen 1, 2, 3, . . . den Versuch anzustellen, bis eine Zahl b gefunden wird, welche der Forderung Genüge leistet.

Nach der zweiten Auffassungsweise wird gesucht, wie oft a gesetzt werden muß, um ab zu bilden. Wir können daher a von ab subtrahiren, von dieser Differenz wieder subtrahiren und diese Operation so lange fortsetzen, bis die Differenz Null wird. Die Anzahl b der vorgenommenen Subtractionen ist dann der Quotient.

Es ist fast überflüssig zu bemerken, daß diese zweite Art der Division die gewöhnliche ist, welche freilich durch die Benutzung des Einmaleins ebenso vereinfacht wird, wie früher die Multiplication.

§. 45.

Der Richtungscoefficient des Quotienten kann gleichfalls aus beiden Proportionen gefunden werden.

Benutzt man die erste, welche ausspricht, daß der Dividend ebenso aus dem unbekannten Quotienten entstehen soll, wie der Divisor aus der positiven Einheit, so hat man zu unterscheiden, ob der Divisor positiv oder negativ ist. Ist er positiv, hat also dasselbe Vorzeichen wie die positive Einheit, so hat der Quotient dasselbe Vorzeichen wie der Dividend; ist er negativ, hat also das entgegengesetzte Vorzeichen wie die positive Einheit, so hat der Quotient das entgegengesetzte Vorzeichen des Dividenden:

Z. B.: $$\frac{\pm ab}{a} = \pm b,$$

$$\frac{\pm ab}{-a} = \mp b.$$

Dasselbe Resultat tritt in etwas anderer Form aus der zweiten Proportion hervor, welche ausspricht: daß der Quotient so aus der positiven Einheit entstehen soll, wie der Dividend aus dem Divisor. Haben daher diese beiden dasselbe Vorzeichen, so muß der Quotient dasselbe Vorzeichen wie die positive Einheit haben, positiv sein; haben Divisor und Dividend entgegengesetzte Vorzeichen, so muß der Quotient das entgegengesetzte Vorzeichen wie die positive Einheit haben, negativ sein.

Z. B.: $$\frac{\pm ab}{\pm a} = b,$$

$$\frac{\pm ab}{\mp a} = -b.$$

§. 46.

Es gilt daher eine ganz ähnliche Regel wie bei der Multiplication: Zahlen einer Richtung durch einander dividirt geben einen positiven Quotienten; entgegengesetzte Zahlen einen negativen Quotienten.

§. 47.

Eine Regel für die Division zusammengesetzter Größen folgt aus dem, was (§. 39) über die Multiplication solcher Ausdrücke bemerkt wurde. Man sucht nämlich den Quotient in seinen einzelnen Theilen, wobei man bei Zahlen von den Theilen höchster Ord-

nung zu beginnen hat. Buchstabenausdrücke müssen zuvor nach einem Buchstaben geordnet werden. D. h. man schreibt den Ausdruck zuerst, in welchem der betreffende Buchstabe am häufigsten als Factor vorkommt und so fort bis zuletzt den Ausdruck, in welchem er am seltensten vorkommt. Sind Divisor und Dividend nach demselben Buchstaben geordnet, so betrachtet man die links stehenden Ausdrücke als die höchster Ordnung und folgt derselben Regel wie bei der Division mehrziffriger Zahlen.

§. 48.

Auch über die Ziffernzahl des Quotienten von Zahlengrößen läßt sich leicht ein Satz aussprechen.

Ist nämlich eine m ziffrige Zahl durch eine n ziffrige zu dividiren, so besteht der Quotient jedesmal aus $m - n$ oder aus $m - n + 1$ Ziffern.

Von den Brüchen.

§. 49.

Die Division führt wieder zu einer Erweiterung des Begriffes der Zahl. Die Multiplication nämlich ist unbeschränkt möglich. Alle Zahlen lassen sich als Factoren mit einander verbinden. Anders verhält es sich bei der Division, wie schon daraus hervorgeht, daß in der zweiten Methode der Division verlangt wurde, gewisse Subtractionen so lange fortzusetzen, bis die Differenz Null erscheine, während im Voraus gar nicht angegeben werden kann, ob diese Differenz überhaupt einmal erscheint.

Soll z. B. 7 als Product des Factors 3 und eines noch unbekannten Factors x betrachtet werden, so daß $3x = 7$, so wäre für $x = 2$, $3x = 6$; für $x = 3$, $3x = 9$. Nun ist aber das erstere Product kleiner, das zweite größer als das gegebene Product, oder die Zahl 3 läßt sich mehr als 2mal und doch nicht 3mal

von 7 abziehen, ohne über den Nullpunkt hinauszugehen. Folglich ist die Division von unserem bisherigen Standpunkte unmöglich.

Um nun auch die Division für alle Fälle zu ermöglichen, sehen wir uns wieder genöthigt, einen Theil unserer Abstraction aufzugeben und eine neue Eigenschaft der Körper in die Arithmetik hineinzuziehen. Diese Eigenschaft besteht in der Theilbarkeit der Materie.

§. 50.

In die Arithmetik übertragen giebt uns diese Eigenschaft eine unbeschränkt theilbare Einheit. Dann sind 2 und 3 zwar noch immer unmittelbar auf einander folgende ganze Zahlen, aber zwischen ihnen liegen noch eine Menge anderer Zahlen, und so erhalten wir den neuen arithmetischen Begriff des Bruches, durch den auch die Division 7 : 3 gelöst wird.

Denn verwandeln wir unsere Aufgabe wieder in die Proportion

$$1 : 3 = x : 7,$$

so heißt dieses: wie 3 aus 1 entsteht, so soll 7 aus x entstehen, oder x soll 3mal gesetzt die Summe 7 geben. Die Zahl 2 giebt 3mal gesetzt nur 6. Daher muß x um so viel größer als zwei sein, daß das 3fache dieses Unterschiedes dem Unterschiede $7 - 6 = 1$ gleich kommt, d. h. der Unterschied zwischen x und 2 muß der dritte Theil der Einheit sein, den wir durch $\frac{1}{3}$ bezeichnen oder $x = 2 + \frac{1}{3}$, wofür man kürzer $2\frac{1}{3}$ schreibt.

§. 51.

Wie früher bei Einführung der entgegengesetzten Größen an denselben die bisherigen Rechnungsoperationen geprüft wurden, ebenso ist eine ähnliche Prüfung jetzt an den Brüchen vorzunehmen. Dazu ist ein näheres Eingehen in die Theorie derselben erforderlich.

Die nächstliegende Definition eines Bruches heißt: Ein Bruch ist ein Vielfaches eines aliquoten Theiles der Einheit. Oder was dasselbe ist: Ein Bruch entsteht, wenn man die Einheit in eine gewisse Anzahl gleicher Theile theilt und einen dieser Theile ein- oder einigemal nimmt.

Die Größe eines Bruches wird also durch zwei Zahlen bestimmt; nämlich durch die Zahl, welche angiebt, in wie viele gleiche Theile die Einheit getheilt worden ist, und durch die Zahl, welche

angiebt, wie oft man einen dieser Theile gesetzt hat. Die erste dieser beiden Zahlen wird der Nenner, die zweite der Zähler des Bruches genannt.

§. 52.

Im Bilde der Zahlenlinie wird durch die Einführung der Brüche auch eine Veränderung eintreten, indem (Figur 4) zwischen zwei benachbarten Endpunkten von Längeneinheiten eine beliebige Anzahl Endpunkte von Theilen solcher Einheiten bemerkt werden. Wir können diese Theilung in Worten so bezeichnen, daß die Einheit nach einem gewissen Maße verändert worden. So ist z. B. in der Figur die Einheit nach dem Maße 3 verändert worden, wodurch die ganzen Zahlen der ursprünglichen Zahlenreihe zwar auch wieder erscheinen, aber in Gestalt von Dritteln. Also:

$$1 = \tfrac{3}{3}\ ,\quad a = \frac{3a}{3}\ ,\quad -b = -\frac{3b}{3}$$

§. 53.

Es versteht sich von selbst, daß die Einheit nach unendlich verschiedenen Maßen verändert werden kann. Es wird auch die Forderung vorkommen können, in einer durch Veränderung der Einheit nach einem bestimmten Maße entstandenen Reihe von Brüchen die Einheit von Neuem zu verändern. Dadurch entsteht wieder eine neue Reihe von Brüchen, in welcher auch die vorher vorhandenen, aber in anderer Gestalt wieder vorkommen müssen.

Es sei nun $\frac{a}{n}$ ein gegebener Bruch, der mithin einer Reihe angehört, die durch Zerlegung des Intervalles der ganzen Zahlen in n gleiche Theile entstanden ist. In dieser Bruchreihe möge nun die Einheit wieder nach dem Maße p verändert werden, so entsteht dieselbe Bruchreihe, als wenn in der ursprünglichen Reihe ganzer Zahlen die Einheit nach dem Maße n p verändert worden wäre. Die neue Einheit besteht daher in einem n p Theil der ganzen Einheit. Der frühere Bruch $\frac{a}{n}$ wird dadurch, daß jede seiner Einheiten in p Theile zerlegt wurde, a p der neuen Einheiten enthalten. Mit anderen Worten es wird sein:

$$\frac{a}{n} = \frac{ap}{np}.$$

Aus dieser Gleichung folgt der wichtige Satz, daß der Werth eines Bruches unverändert bleibt, wenn man Nenner und Zähler mit einer und derselben Zahl multiplicirt und dividirt.

Dieser Satz genügt, um die bisherigen Rechnungsoperationen an Brüchen vornehmen zu können.

§. 54.

Die Addition von Brüchen (wozu jetzt auch die Subtraction gehört, welche wir ja als Addition mit verändertem Vorzeichen kennen gelernt haben) kann nur dann wirklich ausgeführt werden, wenn sämmtliche Theile derselben Bruchreihe angehören. $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d}$ kann unmittelbar ebensowenig addirt werden, als die Frage beantwortet werden kann, wie viel Kraft entwickelt wird, wenn 2 Pferde und 2 Ochsen an einem Wagen ziehen. Beide heterogene Größen müssen erst auf eine gemeinsame Einheit gebracht werden. Sagen wir nämlich, die Kraft eines Pferdes entspricht der Zahl 4, die eines Ochsen aber der Zahl 3 (vergl. Kayser, Mechanik, S. 797), dann können wir die Zugkräfte addiren und erhalten als Summe derselben die Zahl 14.

Ganz analog müssen wir eine gemeinschaftliche Einheit für $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ suchen, d. h. wir müssen die beiden Bruchreihen zu Grunde liegenden Einheiten in dem Maße verändern, daß aus beiden eine und dieselbe neue Bruchreihe hervorgeht, in welcher sowohl $\frac{a}{b}$ als $\frac{c}{d}$ in anderer Gestalt vorkommen.

Diese neue Bruchreihe ist aber offenbar die, deren Nenner das Product der beiden Nenner $b \times d$ ist. In dieser Bruchreihe ist $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$, $\frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$ und nun können wir die Addition ausführen:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

Anmerkung. Es ist auch die Summe

$$\frac{c}{d} + \frac{a}{b} = \frac{bc + ad}{bd}$$

und wegen $bc + ad = ad + bc$ folgt daraus:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$$

d. h.: die Vertauschbarkeit der Theile findet auch bei Brüchen statt.

§. 55.

Bei Ausführung der Subtraction $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ kann häufig ein Kunstgriff angewandt werden, der die Rechnung bedeutend abkürzt, wenn a, b und c, d große aber nicht viel von einander verschiedene Zahlen bedeuten. Da nämlich

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

so kann im Zähler ac sowohl addirt als subtrahirt werden und man hat auch:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc + ac - ac}{bd}$$

Nun ist aber:

$$ad - bc + ac - ac = a(d - c) - c(b - a)$$

und dadurch erhält man die Differenz in der Form:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a(d-c) - c(b-a)}{bd}$$

Z. B.: $\frac{368}{371} - \frac{391}{395} = \frac{4 \,.\, 368 - 3 \,.\, 391}{371 \,.\, 395} = \frac{299}{146545}$

§. 56.

Bei bestimmten Zahlenbeispielen läßt sich der Bruch, der als Summe erscheint, bisweilen noch verkleinern, d. h. Zähler und Nenner lassen sich durch eine und dieselbe ganze Zahl dividiren. Z. B.:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{54}{108} + \frac{18}{108} + \frac{12}{108} = \frac{84}{108} = \frac{7}{9}.$$

Dieser Umstand deutet schon darauf hin, ob es denn nicht möglich wäre, von vorn herein einen kleineren *gemeinschaftlichen Nenner* für die zu addirenden Brüche zu finden, als derjenige ist, welcher durch Multiplication der Nenner der einzelnen Brüche entsteht. Der gemeinschaftliche Nenner muß nun offenbar ein Vielfaches von jedem der einzelnen Nenner sein. Die Aufgabe, die wir uns stellen, besteht also darin, *die kleinste Zahl zu finden, welche durch eine Reihe gegebener Zahlen theilbar ist.*

§. 57.

Um diese Aufgabe zu lösen, müssen wir hier einige Sätze einschalten, die eigentlich einem anderen Gebiete der Mathematik, nämlich der sogenannten *Zahlentheorie* angehören. In der Zahlentheorie, welche die Zahlen ihrer *Qualität* nach betrachtet, während die Arithmetik es mit der *Quantität* zu thun hat, denkt man sich alle Zahlen als Producte, als aus der Multiplication von Factoren entstanden. Diese Factoren denkt man sich dann selbst wieder als Producte u. s. f., bis man endlich zu Factoren gelangt, welche außer durch sich selbst und durch die Einheit durch keine ganze Zahl mehr theilbar sind. Diese Factoren nun nennt man *Primzahlen* (z. B. 1, 2, 3, 5, 7 . . .), während alle andere Zahlen, welche außer durch die Einheit und durch sich selbst noch durch andere ganze Zahlen theilbar sind, *zusammengesetzte Zahlen* heißen (z. B. 4, 6, 8, 9 . . .). *Eine zusammengesetzte Zahl in ihre Primfactoren zerlegen* heißt sämmtliche Primzahlen angeben, durch deren Multiplication die Zahl entsteht, also etwa

$$24 = 2 . 2 . 2 . 3 = 2^3 . 3 \;;\; 360 = 2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 5 = 2^3 . 3^2 . 5.$$

Zwei Zahlen, welche außer der Einheit keinen gemeinschaftlichen Factor haben, heißen *relative Primzahlen* (z. B. 16 und 27, 143 und 420 . . .).

§. 58.

Ein Satz der Zahlentheorie, dessen Wahrheit fast von selbst einleuchtet, der aber auch noch streng begründet zu werden pflegt (vergl. Gauß, disquisitiones arithmeticae, §. 19), heißt, daß jede Zahl, welche durch eine zusammengesetzte Zahl theilbar sein soll, auch durch sämmtliche Primfactoren derselben nach einander theilbar

sein muß, und umgekehrt, daß wenn sämmtliche Primfactoren einer Zahl nach einander in einer anderen Zahl enthalten sind, auch die ganze Zahl in dieser enthalten ist.

§. 59.

Auf diesem Satze beruht es, wenn für mehrere Brüche ein kleinerer gemeinschaftlicher Nenner gefunden werden kann, als das Product sämmtlicher Nenner. Das Verfahren ist folgendes: Man zerlegt alle Nenner in ihre Primfactoren und bildet alsdann den gemeinschaftlichen Nenner aus dem Product sämmtlicher von einander verschiedenen Primzahlen, die bei jener Zerlegung erscheinen, indem man jede derselben so oft als Factor setzt, als sie in dem Nenner vorkommt, in welchem sie am häufigsten enthalten ist.

Es sei z. B. für die Brüche $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{28}$, $\frac{1}{42}$, $\frac{1}{136}$, $\frac{1}{252}$ der kleinste gemeinschaftliche Nenner zu suchen, oder die kleinste Zahl, welche zu gleicher Zeit durch 24, 28, 42, 136, 252 theilbar ist. Zu diesem Zwecke werden sämmtliche Zahlen in ihre Primfactoren zerlegt. Darnach ist:

$$24 = 2^3 . 3\,,\ 28 = 2^2 . 7\,,\ 42 = 2 . 3 . 7\,,\ 136 = 2^3 . 17\,,$$

$$252 = 2^2 . 3^2 . 7.$$

Nun enthält keine dieser Zahlen den Factor 2 mehr als dreimal. Folglich braucht auch die gesuchte Zahl diesen Factor nur dreimal zu enthalten. Der Factor 3 kommt in keiner Zahl mehr als zweimal vor, eben so oft muß er in der gesuchten Zahl vorkommen. Die Factoren 7 und 17 endlich kommen in keiner Zahl mehr als einmal vor, werden daher auch in der gesuchten Zahl nur einmal vorkommen. Diese wird also

$$2^3 . 3^2 . 7 . 17 = 8568$$

sein. In der Praxis bedient man sich des folgenden leicht verständlichen Algorithmus:

2	24	28	42	136	252
2	12	14	21	68	126
2	7	7	21	34	63
3	3	7	21	17	63
7		7	7	17	3
				17	3
	2 . 2 . 2 . 3 . 7 . 17 . 3 = 8568				

§. 60.

Eine andere sich hier eng anschließende Aufgabe der Zahlentheorie, die besonders bei der Verkleinerung der Brüche eine Rolle spielt, ist es, wenn verlangt wird, den größten gemeinschaftlichen Divisor von zwei oder mehreren Zahlen zu finden. Aus leicht begreiflichen Gründen genügt es, die Aufgabe für zwei Zahlen zu lösen. Dieses geschieht aber, indem beide Zahlen in ihre Primfactoren zerlegt werden und diejenigen Primzahlen hervorgehoben werden, welche in beiden vorkommen und zwar so oft, als sie in der Zahl enthalten sind, in welcher sie am seltensten vorkommen. Der größte gemeinschaftliche Divisor kann durch das Zeichen $gg\mathfrak{D}\{\ \}$ dargestellt werden, wo innerhalb der Klammern durch Kommata getrennt die Zahlen bemerkt sind, zu denen er gesucht wird.

So ist $24 = 2^3 . 3$, $36 = 2^2 . 3^2$, also $gg\mathfrak{D}\{24, 36\} = 2^2 . 3 = 12$.

Aehnlich ist: $gg\mathfrak{D}\{72, 84, 108\} = 12$,

$gg\mathfrak{D}\{17, 24\} = 1$.

Zahlen, deren größter gemeinschaftlicher Divisor 1 ist, und relative Primzahlen sind offenbar identische Begriffe.

§. 61.

Ist die Zerlegung in Primfactoren der Zahlen, deren größten gemeinschaftlichen Divisor man sucht, nicht bekannt, so ist es doch möglich, durch Versuche obige Aufgabe zu lösen. Dazu gab Poinsot in Liouville, Journal de mathématiques pures et appliquées,

Tome X, pag. 48, folgende Methode. Man probire, um den größten gemeinschaftlichen Divisor der Zahlen a, b zu finden, ob a in b enthalten ist, weil alsdann a selbst jener Divisor ist. Bleibt ein Rest, so wird derselbe um b vermehrt und von Neuem durch a dividirt, und das Aufgehen dieser Division würde zeigen, daß a in 2b enthalten ist. Ein neuer Rest hingegen wird wieder um b vermehrt und durch a dividirt und die Operation so lange fortgesetzt, bis das Aufgehen der mten Division anzeigt, daß a ein aliquoter Theil von m b ist, aber von keinem früheren Multiplum von b. Dann ist:

$$g\,g\,D \left\{ a, b \right\} = \frac{a}{m}$$

§. 62.

Denn erstens ist $\frac{a}{m}$ eine ganze Zahl. Es sei nämlich $a \,.\, n = b \,.\, m$, so müssen n, m relative Primzahlen sein, weil sonst b m nicht das erste durch a theilbare Multiplum von b sein könnte; und da $a \,.\, n$ durch m theilbar sein muß, so muß auch a durch m theilbar sein. Zweitens ist $\frac{a}{m}$ in b enthalten, und zwar $b = n \,.\, \frac{a}{m}$ Endlich drittens ist $\frac{a}{m}$ die größte Zahl, welche gleichzeitig in a und b enthalten ist. Denn gäbe es einen $g\,g\,D \left\{ a, b \right\} = d$, so daß $d > \frac{a}{m}$ und etwa $a = \mu \,.\, d$, $b = \nu \,.\, d$ wäre, so müßte, wegen $a < m \,.\, d$, auch $\mu\, d < m\, d$ und $\mu < m$ sein. Aber $\mu \,.\, b = \mu \,.\, \nu \,.\, d = \nu \,.\, a$. Es gäbe also ein niedrigeres Vielfaches $\mu \,.\, b$ von b, in welchem a als Factor aufginge, was gegen die Voraussetzung ist. Somit ist $\frac{a}{m}$ in der That der größte gemeinschaftliche Divisor von a, b und wird vermittelst m Divisionsversuchen gefunden.

§. 63.

So einfach diese Methode dem Gedanken nach ist, so tritt sie doch in der Praxis hinter der älteren schon von Euclid angegebenen Methode zurück, welche auf nachfolgendem Satze der Zahlentheorie

beruht. Wenn a, b, f, q, r lauter ganze Zahlen bedeuten und es ist $f = gg\mathfrak{D}\{a, b\}$, während $a = b \cdot q + r$, so ist auch

$$f = gg\mathfrak{D}\{b, r\}.$$

Denn offenbar muß jede Zahl, die in b und in r enthalten ist, auch in $b \cdot q + r = a$ enthalten sein, daher kann unmöglich $gg\mathfrak{D}\{b, r\} > f$ sein; aber r ist jedenfalls durch f theilbar, als Differenz der Zahlen $a - b \cdot q$, welche beide durch f theilbar sind, folglich ist wirklich $f = gg\mathfrak{D}\{b, r\}$.

Statt der zwei Zahlen a, b, deren größter gemeinschaftlicher Divisor zu suchen war, sind auf diese Weise die zwei Zahlen b, r substituirt, von denen die eine unverändert, die andere viel kleiner geworden ist. Denn während stillschweigend $a > b$ vorausgesetzt wurde, ist $r < b$ anzunehmen. Die Betrachtung kann aber auf noch kleinere Zahlen zurückgeführt werden. Denn ist etwa $b = q_1 \cdot r + r_1$, so ist auch $gg\mathfrak{D}\{b, r\} = gg\mathfrak{D}\{r, r_1\}$, wo $r = r, r_1 < b$.

Und dieses Zurückführen auf immer kleinere Zahlen wird endlich einmal aufhören müssen, da wir uns keine unendliche Reihenfolge von immer kleiner werdenden ganzen Zahlen denken können. Mit anderen Worten, es wird einmal ein Rest kommen, welcher in dem vorhergehenden Reste aufgeht, und dann hat das Verfahren ein Ende. Dieser Rest ist nämlich offenbar der gesuchte $gg\mathfrak{D}\{a, b\}$.

Auch für diese Aufgabe bedient man sich in der Praxis eines eigenthümlichen Algorithmus, der sich an einem Beispiele leicht ergiebt. Es sei gesucht $gg\mathfrak{D}\{1026, 756\}$, so schreibt man:

$$\begin{array}{rl}
 & 1026 : 756 = 1 \\
 & \underline{756} \\
 & 756 : 270 = 2 \\
 & \underline{540} \\
 & 270 : 216 = 1 \\
 & \underline{216} \\
 & 216 : 54 = 4 \\
 & \underline{216} \\
 & 0
\end{array}$$

folglich ist $54 = gg\mathfrak{D}\{1026, 756\}$.

In der That ist $756 = 54 \cdot 14$, $1026 = 54 \cdot 19$.

§. 64.

Die Frage, wie viele Divisionen bei dem Euclidischen Verfahren nothwendig sind, um den größten gemeinschaftlichen Divisor zweier Zahlen zu finden, hat die französischen Mathematiker Binet, Lamé, Lionnet vielfach beschäftigt. Folgende Regel, die von Lionnet herrührt (vergl. Nouvelles annales de mathématiques, Tome IV, pag. 617, und Grunert, Archiv der Mathematik und Physik, Theil VIII, S. 137), scheint der elementarsten Ableitung fähig zu sein.

Ist g g D (A, B) = d und $\frac{A}{d} = a$, $\frac{B}{d} = b$, so bedarf es offenbar eben so vieler Operationen, um für A und B den Divisor d, als um für a und b den Divisor 1 zu finden. Man kann daher annehmen, es seien a, b relative Primzahlen. Dann ist das Resultat der auf einander folgenden Operationen:

$$a = b \cdot q + r$$
$$b = r \cdot q_1 + r_1$$
$$r = r_1 \cdot q_2 + r_2$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$r_{n-4} = r_{n-3} \cdot q_{n-2} + 1$$

wenn angenommen wird, daß die nte Division die letzte sein soll.

Es muß daher der vorletzte Divisor $r_{n-3} > 1$ sein, d. h.:

$$r_{n-3} \geqq 2.$$

Daraus folgt ferner, da $r_{n-4} \geqq r_{n-3} + 1$, daß

$$r_{n-4} \geqq 3.$$

Ebenso ist, wenn r_{k-1}, r_k, r_{k+1} drei auf einander folgende Divisoren sind:

$$r_{k-1} \geqq r_k + r_{k+1}.$$

Bilden wir daher die Reihenfolge der Zahlen

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 \ldots\ldots$$

oder durch Buchstaben bezeichnet

$$c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \ldots\ldots$$

deren Gesetz darin besteht, daß

$$c_{k+1} = c_k + c_{k-1},$$

so ist jedenfalls kein Glied dieser Reihe größer als das entsprechende Glied der Reihe:

$$r, r_{n-3}, r_{n-4}, r_{n-5}, r_{n-6} \ldots$$

oder es ist

$$r_1 \geqq c_{n-2},\ r \geqq c_{n-1},\ b \geqq c_n.$$

Bilden wir daher die Reihe der c und finden darin ein Glied $c_\mu > b$, so ist jedenfalls $n < \mu$, weil $b \geqq c_n$ sein muß.

Es sei z. B. g g D $\{243, 19\}$ zu suchen, so ist $c_7 = 21 > 19$, folglich ist $n < 7$, oder es bedarf höchstens 6 Divisionen, um den gesuchten größten gemeinschaftlichen Divisor zu finden.

§. 65.

Nach einer Bemerkung von Binet wird das Verfahren noch mehr abgekürzt, wenn man nicht immer positive Reste entstehen läßt, sondern, so oft der Rest mehr als die Hälfte des Divisors beträgt, den Quotient um 1 vermehrt, worauf ein negativer aber kleinerer Rest entsteht.

Darnach nimmt das Beispiel des §. 63 folgende Gestalt an;

$$\begin{array}{rrl}
 & 1026 : 756 & = 1 \\
 & 756 & \\
\hline
756 : 270 & & = 3 \\
810 & & \\
\hline
270 : -54 & & = 5 \\
270 & & \\
\hline
0 & &
\end{array}$$

folglich g g D $(1026, 756) = 54$.

§. 66.

Ein Bruch $\frac{m}{n}$, dessen Zähler und Nenner relative Primzahlen, und welcher daher nicht weiter verkleinert werden kann, heißt ein reducirter Bruch.

$$\text{Z. B.: } \frac{3}{8}, \frac{5}{6}, \frac{17}{33} \ldots$$

§. 67.

Aus den Betrachtungen des §. 54 ist klar, daß Addition zweier Brüche nicht damit zu verwechseln ist, wenn zu Zähler oder Nenner eines Bruches eine Zahl addirt wird. In Betreff der Veränderung, welche ein Bruch dadurch erleidet, ist klar, daß derselbe vergrößert

(verkleinert) wird, wenn man den Zähler vergrößert (verkleinert) oder den Nenner verkleinert (vergrößert).

Wird zum Zähler und Nenner eines Bruches eine und dieselbe Zahl addirt oder von denselben abgezogen, so verändert der Bruch gleichfalls seinen Werth. Im ersten Falle wird er größer und nähert sich der Grenze 1, im zweiten Falle wird er kleiner.

Denn es sei $\frac{a}{b}$ der gegebene Bruch, und $a < b$., dann ist

$$\frac{a}{b} = 1 - \left(1 - \frac{a}{b}\right) = 1 - \frac{b-a}{b}$$

$$\frac{a+c}{b+c} = 1 - \left(1 - \frac{a+c}{b+c}\right) = 1 - \frac{b-a}{b+c}$$

Nun ist nach dem oben Bemerkten:

$$\frac{b-a}{b+c} < \frac{b-a}{b}$$

also auch

$$1 - \frac{b-a}{b} < 1 - \frac{b-a}{b+a}$$

oder was dasselbe ist:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$$

Gleichwohl bleibt immer:

$$1 - \frac{b-a}{b+c} < 1$$

womit der erste Satz bewiesen ist.

Andererseits ist

$$\frac{a-c}{b-c} = 1 - \left(1 - \frac{a-c}{b-c}\right) = 1 - \frac{b-a}{b-c}$$

also auch

$$\frac{a-c}{b-c} < \frac{a}{b}$$

§. 68.

Von der Addition der Brüche und den mancherlei Bemerkungen, auf welche wir dadurch geführt wurden, gehen wir zu der Multiplication derselben über.

Ist $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ zu finden, so fragt man, der Definition der Multiplication gemäß, zunächst nach der Entstehungsweise von $\frac{a}{b}$ aus der positiven Einheit. Diese ist nun so, daß die Einheit nach dem Maße b verändert wurde und a solcher neuen Einheiten zusammengefaßt wurden. Es ist daher ebenso mit $\frac{c}{d}$ zu verfahren. Die ursprünglich nach dem Maße d veränderte Einheit ist nochmals nach dem Maße b zu verändern, und von den Theilen $\frac{c}{b\,d}$ sind a zu nehmen, d. h. $\frac{c}{b\,d} + \frac{c}{b\,d} + \frac{c}{b\,d} + \ldots$ (amal) $= \frac{a\,c}{b\,d}$.

Als Resultat der Operation erhalten wir daher:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a\,c}{b\,d}$$

oder in Worten ausgedrückt: das Product mehrerer Brüche ist wieder ein Bruch, dessen Zähler das Product sämmtlicher Zähler, und dessen Nenner das Product sämmtlicher Nenner ist.

Unter dieser Regel ist auch die für die Multiplication von Brüchen mit ganzen Zahlen begriffen, wenn man überlegt, daß alle ganze Zahlen als Brüche mit dem Nenner 1 betrachtet werden können.

Anmerkung. Die Vertauschbarkeit der Factoren findet hier offenbar gleichfalls statt. Denn $\frac{c}{d} \times \frac{a}{b} = \frac{c\,a}{d\,b}$ aber $c\,a = a\,c$, $d\,b = b\,d$, also $\frac{c\,a}{d\,b} = \frac{a\,c}{b\,d}$ oder

$$\frac{c}{d} \times \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$$

§. 69.

Wir können hier eine Bemerkung über die Größe des Productes im Verhältniß zur Größe der Factoren machen. Bei ganzen Zahlen ist nämlich das Product größer als jeder Factor, wenn man die

nur formelle Multiplication mit dem Factor 1 außer Betracht läßt. Bei Brüchen kann dieses Verhältniß sehr verschieden sein.

Um es näher zu bestimmen, unterscheiden wir ächte und unächte Brüche, je nachdem der Zähler kleiner oder größer als der Nenner ist. Ein ächter Bruch ist daher kleiner als 1, ein unächter größer als 1. Mit anderen Worten: jeder ächte Bruch kann in der Form $1 - \delta$, jeder unächte Bruch in der Form $1 + \varepsilon$ dargestellt werden, wo δ, ε positive Größen sind und überdies $\delta < 1$.

Bei der Betrachtung dieser letzten Gestalt werden nun folgende Sätze klar:

1) Das Product zweier unächten Brüche ist größer als jeder derselben. Denn:

$$(1 + \varepsilon) . (1 + \varepsilon^1) > (1 + \varepsilon) . 1 \text{ und } > 1 . (1 + \varepsilon^1)$$

2) Das Product zweier ächten Brüche ist kleiner als jeder derselben. Denn:

$$(1 - \delta) . (1 - \delta^1) < (1 - \delta) . \text{ und } < 1 . (1 - \delta^1)$$

3) Das Product eines ächten Bruches in einem unächten ist größer als der erstere und kleiner als der letztere. Denn:

$$(1 - \delta) . (1 + \varepsilon) > (1 - \delta) . 1 \text{ und } < 1 . (1 + \varepsilon).$$

Von dem letzteren Falle interessirt uns noch die speciellere Annahme, daß der eine Bruch das Umgekehrte oder Reciproke des andern ist, d. h.: daß, was im ersten Bruche Zähler ist, im zweiten Bruche Nenner ist und umgekehrt. Das Product zweier reciproker Brüche ist aber immer die Einheit. Denn

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{a\,b}{a\,b} = 1.$$

§. 70.

Endlich gehen wir zu der Division $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = x$ über. Als Proportion geschrieben ist hier:

$$1 : x = \frac{c}{d} : \frac{a}{b}$$

d. h. x soll ebenso aus der positiven Einheit gebildet werden, wie $\frac{a}{b}$ aus $\frac{c}{d}$ entstand. Diese Entstehung können wir uns aber füg-

lich als einen doppelten Akt denken, indem durch den ersten von $\frac{c}{d}$ zur Einheit übergegangen wurde, durch den zweiten von der Einheit zu $\frac{a}{b}$. Der Uebergang von $\frac{c}{d}$ zur Einheit erfolgt aber nach dem Obigen durch Multiplication mit dessen reciprokem Bruche $\frac{d}{c}$, und der Uebergang von der Einheit zu $\frac{a}{b}$ durch Multiplication mit $\frac{a}{b}$. Da nun ebenso x aus 1 zu bilden ist, so ist 1 zuerst mit $\frac{d}{c}$, dann mit $\frac{a}{b}$ zu multipliciren, d. h. $x = \frac{d\,a}{c\,b}$ oder:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c},$$

d. h. durch einen Bruch dividirt man, wenn man mit dem reciproken Bruche multiplicirt.

§. 71.

Auf diese Weise ist leicht ersichtlich, wie von nun an jede Division als eine Multiplication des Dividenden in das Umgekehrte des Divisors betrachtet werden kann, und daß somit die Division als selbständige Operation verschwindet.

Da wir schon früher (§. 28) die Subtraction aus der Reihe der Operationen gestrichen haben, so bleiben uns von den vier Operationen der Addition, Subtraction, Multiplication, Division (den sogenannten vier Species) nur die zwei Operationen der Addition und der Multiplication. Darin liegt ein wesentliches Zeichen des Fortschrittes der Wissenschaft. Eine jede Operation in der Arithmetik führt nämlich ihren Gegensatz mit sich, der auf dieselben Principien zurückgeführt werden muß. Allerdings ist dieses nicht immer gleich erkennbar; aber wo man noch nicht so weit gekommen ist, da ist gewiß noch eine Lücke auszufüllen.

Von dem Unendlichgroßen.

§. 72.

Ein wesentlicher Punkt, der noch in Betreff der Division zu betrachten bleibt, ist die Division durch Null, weil hier zum ersten Male eine neue höchst wichtige Betrachtungsweise erscheint, die Grenzbetrachtung.

Es sei nämlich der Bruch $\frac{a}{0}$ gegeben, so läßt sich unmittelbar keine Bedeutung desselben erkennen, indem es nicht möglich ist, durch Veränderung der Einheit nach irgend einem Maße dieses Resultat zu erhalten. Mittelbar indessen können wir dazu gelangen.

Es sei der Einfachheit wegen $\frac{1}{0}$ der vorgelegte Bruch. Statt seiner möge nun die Division $1 : \frac{1}{x}$ betrachtet werden, deren Quotient x ist. Wenn nun x beliebig groß angenommen wird, so wird $\frac{1}{x}$ immer kleiner, und umgekehrt, je kleiner $\frac{1}{x}$ ist, desto größer wird der Quotient $1 : \frac{1}{x}$. Bei immerwährender Verkleinerung nähert sich aber der Bruch $\frac{1}{x}$ immer mehr der Grenze Null, und zugleich wird der Quotient $1 : \frac{1}{x}$ größer als irgend eine angebbare Zahl. Dieses wird kürzer so ausgedrückt, daß man sagt: Wenn der Divisor Null wird, wird der Quotient unendlich groß, und schreibt dafür:

$$\frac{1}{0} = \infty.$$

§. 73.

Noch größer hätte der Quotient sein müssen, wenn der Dividend a größer als 1 gewesen wäre. Da wir indessen kein mehr

als unendlich groß ausdrücken können, so schreiben wir allgemein

$$\frac{a}{0} = \infty,$$

bemerken aber zugleich, daß dieses „unendlich groß" von dem $\infty = \frac{1}{0}$ wohl verschieden ist. Jedes derselben bedeutet eine Zahl, welche an Größe jede angebbare Zahl übertrifft; aber ob $\infty = \infty$ oder $\infty > \infty$ oder $\infty < \infty$, darüber läßt sich hier nichts Allgemeines feststellen.

Für diese scheinbare Paradoxie lassen sich überdies mancherlei Beispiele anführen.

§. 74.

Eine Linie (Figur 5), die vom Punkte A ausgehend nach der Richtung AX unbegrenzt fortgesetzt wird, und eine zweite Linie, welche durch den Punkt A gehend nach beiden Seiten, nach der Richtung AX und AX^1 unbegrenzt fortgesetzt wird, sind jedenfalls beide unendlich groß, aber gewiß nicht einander gleich zu setzen; die Länge der zweiten Linie ist das Doppelte der ersten.

Ein Körper, der von A aus (Figur 6) in der Richtung AX sich bewegt und in jeder Zeiteinheit einen Weg AB zurücklegt, wird nach unendlich langer Zeit einen unendlich großen Weg zurückgelegt haben. Ebenso wird ein zweiter Körper, der mit dem ersten zugleich sich von A in derselben Richtung fortbewegt, aber in der Zeiteinheit einen Weg $AC = 3AB$ zurücklegt, nach derselben unendlich langen Zeit einen gleichfalls unendlich großen Weg zurückgelegt haben. Nichts desto weniger ist dieser zweite unendlich große Weg das Dreifache des ersten.

Denken wir uns endlich wieder zwei Körper, die sich in A befinden (Figur 6). Der erste bewegt sich in der Richtung AX und legt in jeder Zeiteinheit einen Weg AB zurück. Der zweite bewegt sich in derselben Richtung mit derselben Geschwindigkeit, beginnt aber seine Bewegung eine Zeiteinheit später als der erste Körper. In einem Momente, der unendlich spät nach dem Abgange des ersten Körpers eintritt, haben beide Körper unendlich große Wege zurückgelegt. Allein es findet doch zwischen denselben die Differenz AB statt.

Diese Beispiele lieferten uns demnach Fälle, in welchen $\infty = 2 . \infty$, $\infty = 3 . \infty$, $\infty = \infty + AB$ war.

§. 75.

Im Zusammenhange mit endlichen Größen verhält sich demnach das Unendlichgroße folgendermaßen. Es ist:

$$\infty \pm a = \infty,$$
$$a - \infty = - \infty,$$
$$a \times \infty = \infty,$$
$$\frac{\infty}{a} = \infty,$$
$$\frac{a}{\infty} = 0.$$

Die Ausdrücke

$$\infty - \infty, \frac{\infty}{\infty}, 0 . \infty, \frac{0}{0}$$

hingegen sind unbestimmt, wie sich aus den vorigen Paragraphen ergiebt, wenn man noch erwägt, daß $0 . \infty = \frac{1}{\infty} . \infty = \frac{\infty}{\infty}$ und ebenso $\frac{0}{0} = \frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty} \times \frac{\infty}{1} = \frac{\infty}{\infty}$.

§. 76.

Bei solchen unbestimmten Formen, die in den Rechnungsoperationen n i e von vorn herein gegeben sind, kommt es wesentlich darauf an, wie man zu denselben gelangt ist; und alsdann läßt sich der wahre Werth mit Hülfe des höheren Calculs erkennen. Mitunter genügen dazu auch einfache Betrachtungen.

So ist z. B., weil $(a + b) \times (a - b) = a^2 - b^2$, immer

$$\frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b.$$

Erhält nun b den Werth $b = a$, so nimmt der Bruch $\frac{a^2 - b^2}{a - b}$ die Gestalt $\frac{0}{0}$ an, während sein Werth die Gestalt $2 a$ annimmt. Hier ist daher

$$\frac{0}{0} = 2 a.$$

Von den Decimalbrüchen.

§. 77.

Von den Brüchen interessiren uns in praktischer Beziehung noch besonders die sogenannten Decimalbrüche, d. h. solche Brüche, deren Nenner durch wiederholte Multiplication der Zahl 10, also der Grundzahl unseres Zahlensystems, mit sich selbst gebildet werden.

Man sollte sagen, gleich bei der Einführung eines Zahlensystemes hätte der Gedanke auftauchen müssen, dasselbe Princip, welches für die ganzen Zahlen gilt, auch bei Brüchen in Anwendung zu bringen, d. h. den Nenner des Bruches durch die bloße Stellung des Zählers anzuzeigen, wie bei den ganzen Zahlen die Position uns den Ordnungswerth angiebt. So einfach dieser Gedanke auch lautet, und so wichtig er auch andererseits in der Anwendung ist, so kam er doch erst spät der Wissenschaft zu Gute. Simon Stevin aus Brügge (Dienstmann des Fürsten Moritz von Nassau, Lehrer und Freund von Albert Girard, der auch Stevins Werke nach dessen Tode sammelte und herausgab), hat das große Verdienst, zuerst darauf aufmerksam gemacht zu haben, wie bequem eine Rechnung mit solchen Decimalbrüchen wäre, und wie bei ihnen mit rationeller Bezeichnung alle Schwierigkeiten der Rechnung mit Brüchen wegfielen. Seine Schrift über diesen Gegenstand erschien 1585 unter dem Titel: La disme enseignant facilement expédier par nombres entiers sans rompuz tous comptes se rencontrans aux affaires des hommes auf etwa 7 Folioseiten, wovon die Vorrede den vierten Theil einnimmt.

Anmerkung. Als Erfinder der Decimalbrüche kann man auch Johannes Müller (aus Königsberg bei Hildburghausen), Regiomontanus, geb. 1436, gest. 1475, nennen. Wenigstens hat er schon Decimaleintheilung in seinen trigonometrischen Tafeln. Aber das leichte Rechnen mit Decimalbrüchen hat erst Stevin gezeigt. Eine Biographie von Stevin schrieb Quetelet, Brüssel 1845.

§. 78.

Nach Stevins Vorgange werden die Decimalbrüche, wie bereits angezeigt, so bezeichnet, daß man bloß den Zähler hinschreibt, während der Nenner durch die Stellung sich ergiebt.

So wie nämlich in der Bezeichnung der Zahlen nach unserem Zahlensysteme jede weiter links stehende Einheit den zehnfachen Werth von der ihr rechts zur Seite stehenden besitzt, so setzte Stevin diese Bezeichnung auch rückwärts noch weiter als bis zu den Einern fort. Die Stelle, die daher rechts von den Einern sich befindet, bezeichnet Zehntel, die rechts folgende Hundertel, die dritte Tausentel u. s. w. Die Stelle der Einer wird dadurch bezeichnet, daß man zu ihrer Rechten ein Komma setzt.

Darnach ist $745{,}328 = 745 + \frac{3}{10} + \frac{2}{100} + \frac{8}{1000} = 745\frac{328}{1000}$

$$0{,}03103 = \frac{3}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{3}{100000} = \frac{3103}{100000}.$$

Analog zu §. 9 kann man auch die Decimalbrüche durch Indices bezeichnen. Es erscheint passend, dazu die negativen Zahlen zu wählen. Also

$$\overset{-1}{7} = 0{,}7\,;\; \overset{-3}{17} = 0{,}017\,;\; \overset{-2}{398} = 3{,}98.$$

§. 79.

Daß nun auch die Rechnungsoperationen bei Decimalbrüchen viel einfacher als bei gewöhnlichen Brüchen sind, beruht darauf, daß jene sehr leicht zu behandelnde Nenner haben.

Sind zwei oder mehrere Zahlen, welche Decimalbrüche enthalten, zu addiren, so müssen sie zunächst so unter einander geschrieben stehen, daß Komma unter Komma sich befindet, damit die Stellen von gleicher Ordnung, oder, wie wir uns auch ausdrücken können, die gleich hohen Stellen unter einander zu stehen kommen: Einer unter Einern, Zehner unter Zehnern, Zehntel unter Zehnteln, Hundertel unter Hunderteln u. s. w. Um dann die Brüche zu addiren, haben wir sie auf gemeinschaftlichen Nenner zu bringen.

Bei Decimalbrüchen ist dieses dadurch einfach, daß der größte vorkommende Nenner immer durch alle kleineren Nenner theilbar ist, also selbst jenen kleinsten gemeinschaftlichen Nenner, jenen Ge-

neralnenner bildet; und ferner ist die Zurückführung aller Brüche auf diesen Generalnenner dadurch erleichtert, daß sie durch bloßes Anhängen von Nullen erfüllt wird.

Haben wir z. B. die Addition

$$17,567 + 0,0301 + 4372,61$$

so schreiben wir:

$$\begin{array}{r} 17,567 \\ 0,0301 \\ 4372,61 \end{array}$$

und bringen alle Brüche auf den Nenner 10000 dadurch, daß wir den ersten durch eine, den letzten durch zwei rechts angehängte Nullen ergänzen:

$$\begin{array}{r} 17,5670 \\ 0,0301 \\ 4372,6100. \end{array}$$

Addiren wir denn ohne Weiteres wie bei ganzen Zahlen, da auch über das Komma hinaus die Zehner einer Ordnung als Einer der nächstfolgenden Ordnung mitgenommen werden können, so erhalten wir

$$4390,2071.$$

Da Nullen bei der Addition unwirksam sind, so ist es in Praxi nicht nothwendig, die Brüche alle formell auf einen Nenner zu bringen, wenn man sich nur bemerkt, daß dieser Umstand allein es ist, der hier zu Grunde liegt.

§. 80.

Die besondere Betrachtung der Subtraction wäre überflüssig, wenn nicht hier eines Kunstgriffes Erwähnung geschehen müßte, welcher freilich auch schon bei ganzen Zahlen Anwendung findet, besonders aber bei der Rechnung mit Decimalbrüchen benutzt zu werden pflegt. Er besteht darin, daß eine und dieselbe Zahl zu einer algebraischen Summe addirt und von ihr subtrahirt wird.

Hat man nämlich den Ausdruck a + b — c, wo etwa c eine n ziffrige Zahl sein mag, so schreibt man:

$$a + b + (\overset{n}{1} - c) - \overset{n}{1}.$$

Indem man nun die Zahl $\overset{n}{1} - c$ in Rechnung bringt, hat man dieselbe zu addiren und dann nur noch $\overset{n}{1}$ von der Gesammtsumme abzuziehen, was aber meistens beim ersten Anblicke geschieht.

Die Zahl $\overset{n}{1} - c$ nennt man das *Complement*, oder die *decadische Ergänzung* von c und bezeichnet sie durch $X\varepsilon . c$, während noch $- \overset{n}{1}$ dahinter gesetzt wird.

So wird z. B. $23{,}031 + 0{,}30103 - 3{,}72 + 1{,}11 - 2{,}764$ folgendermaßen geschrieben:

$$\begin{array}{rcll} & & 23{,}031 & \\ & & 0{,}30103 & \\ X\varepsilon . 3{,}72 & = & 6{,}28 & -10 \\ & & 1{,}11 & \\ X\varepsilon . 2{,}764 & = & 7{,}236 & -10 \\ \hline & & 17{,}95803. & \end{array}$$

§. 81.

Nicht minder leicht ist die Multiplication mit Decimalbrüchen. Wenn nämlich Brüche mit einander zu multipliciren waren, so multiplicirten wir Zähler mit Zähler, Nenner mit Nenner. Haben wir dabei Brüche, die noch mit ganzen Zahlen verbunden sind, so lassen wir beide am Besten in Gestalt eines unächten Bruches; diese Verwandlung in einen unächten Bruch ist aber nie leichter als bei ganzen Zahlen mit Decimalbrüchen, wo sie nur in einer Weglassung des Komma's besteht, worauf als Nenner der Nenner des Bruches geschrieben wird, d. h. die 1 mit so vielen Nullen, als es Decimalstellen waren.

$$\text{Z. B.: } 36{,}045 = \frac{36045}{1000}.$$

Die Zähler sind dann ganze Zahlen, welche man multiplicirt, und das Product der Nenner eine 1 mit so vielen Nullen, als in beiden Nennern zusammengenommen waren. Dadurch ist aber das Mittel gegeben, das Product selbst wieder als einen Decimalbruch zu schreiben. Man hat alsdann die einfache Regel: *Decimalbrüche werden unter Weglassung der Kommata wie ganze Zahlen multiplicirt, worauf von dem Producte so viele*

Decimalstellen abgeschnitten werden, als in den Factoren zusammengenommen enthalten sind.

Man kann diese Regel auch so fassen, daß bei Weglassung der Kommata die niederste Stelle der Factoren nach §. 78 mit einem Index versehen wird, und daß alsdann der Index der niedersten Stelle des Productes gleich der Summe jener Indices ist (vergl. §. 36).

Hat das Product weniger Ziffern, als Decimalstellen erforderlich sind, so müssen natürlich zwischen das Komma und die höchste Ziffer des Productes so viele Nullen eingeschoben werden, bis die geforderte Anzahl Ziffern erreicht ist.

Z. B.: $13{,}321 \times 2{,}405 = 32{,}037005$
$0{,}301 \times 0{,}004 = 0{,}001204.$

§. 82.

Um die Division auszuführen, thun wir am besten, wie bei der Addition beide Brüche auf einen gemeinschaftlichen Nenner zu bringen. Die Folge davon ist leicht einzusehen. Denn gesetzt der Dividend sei in Form eines gewöhnlichen Bruches geschrieben $\frac{a}{\overset{n}{1}}$ und der Divisor $\frac{b}{\overset{n}{1}}$, wo die beiden Nenner $\overset{n}{1}$ also einander gleich sind, so ist der Quotient:

$$\frac{a}{\overset{n}{1}} : \frac{b}{\overset{n}{1}} = \frac{a}{\overset{n}{1}} \times \frac{\overset{n}{1}}{b} = \frac{a}{b}.$$

Wir erhalten somit augenblicklich den Quotienten in der Gestalt eines gewöhnlichen Bruches, wenn beide Decimalbrüche, der des Divisors sowie der des Dividenden, auf einerlei Stellenzahl gebracht und dann unter Weglassung der Kommata als ganze Zahlen behandelt werden.

§. 83.

Gewöhnlich wird indessen verlangt, auch dem Quotienten die Gestalt eines Decimalbruches zu geben, um bei den weiteren Rechnungsoperationen, die etwa noch mit denselben vorzunehmen sein dürften, auch die Vortheile der Decimalrechnung zu genießen.

Wir werden dadurch zu der wichtigen Aufgabe geführt: Einen gegebenen gemeinen Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln.

Ist der gegebene Bruch ein unächter, so werden die Ganzen, die er enthält, zuerst durch gewöhnliche Division gesucht und so können wir die Aufgabe dahin beschränken, einen ächten gemeinen Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln.

Es sei der gegebene Bruch etwa $\frac{a}{b}$, so wird:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overset{n}{1}}{b \cdot \overset{n}{1}} = \frac{a \cdot \overset{n}{1} : b}{\overset{n}{1}}$$

sein und diese letztere Form ist die eines Decimalbruches.

Als Regel gilt daher, daß man an den Zähler a eine beliebige Anzahl n von Nullen anhänge und dann durch den Nenner b dividire, der Quotient bildet dann den Zähler des Decimalbruches, dessen Nenner $\overset{n}{1}$ ist.

§. 84.

Aus dieser Regel wird sofort klar, daß es nicht möglich ist, die Aufgabe jedesmal in aller Strenge zu lösen, indem dazu erforderlich wäre, daß die Division $a \cdot \overset{n}{1} : b$ sich immer ausführen ließe. Dieses ist aber unter der Voraussetzung, daß $\frac{a}{b}$ ein reducirter Bruch offenbar nur dann möglich, wenn b ein Factor von $\overset{n}{1}$ ist, d. h. wenn b von der Gestalt $2^k \cdot 5^l$ ist, wo k und l zwei ganze Zahlen darstellen, deren jede kleiner als n ist, aber auch Null sein kann.

Z. B.: $\frac{1}{2} = 0{,}5$

$$\frac{3}{25} = 0{,}12$$

$$\frac{17}{32} = 0{,}53125$$

$$\frac{7}{40} = 0{,}175.$$

Sowie b noch irgend eine andere Primzahl als 2 und 5 zum Factor hat, geht die Division $a \cdot \overset{n}{1} : b$ nie auf, sondern es ist:

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{\overset{n}{1}} + \frac{\alpha}{b \cdot \overset{n}{1}}.$$

Der Decimalbruch $\frac{p}{\overset{n}{1}}$ ist daher um $\frac{\alpha}{b \cdot \overset{n}{1}}$ kleiner als der zu verwandelnde gemeine Bruch $\frac{a}{b}$.

§. 85.

Allein es war die Zahl $\overset{n}{1}$, mit welcher Zähler und Nenner des Bruches $\frac{a}{b}$ zunächst multiplicirt wurde, eine willkürliche. Statt ihrer hätte eben so gut eine andere größere Zahl $\overset{r}{1}$ genommen werden können. Dann wäre die Division $a \cdot \overset{r}{1} : b$ im Allgemeinen zwar auch nicht aufgegangen, aber man hätte einen Decimalbruch $\frac{q}{\overset{r}{1}}$ gefunden, so daß:

$$\frac{a}{b} = \frac{q}{\overset{r}{1}} + \frac{\beta}{b \cdot \overset{r}{1}}$$

d. h. daß der Unterschied von $\frac{a}{b}$ und $\frac{q}{\overset{r}{1}}$ nur $\frac{\beta}{b \cdot \overset{r}{1}}$, also kleiner als der vorige Unterschied $\frac{\alpha}{b \cdot \overset{n}{1}}$ ist. Mit anderen Worten: Wir können durch Vermehrung der in Zähler und Nenner angehängten Nullen zwar keinen Decimalbruch finden, der dem gegebenen gemeinen Bruche genau gleich ist, aber wir können uns doch so viele Decimalstellen verschaffen, daß die Differenz zwischen dem Decimalbruche und dem gemeinen Bruche kleiner wird, als jede Differenz, die uns angegeben wird.

Ganz verschwinden wird diese Differenz nur, wenn die Anzahl der Decimalstellen unendlich groß wird: denn alsdann ist sie

$$\frac{\mu}{b \cdot \overset{\infty}{1}} = \frac{\mu}{\infty} = 0.$$

§. 86.

So haben wir hier zum ersten Male das Beispiel einer unendlichen Reihenfolge von Gliedern, deren Summe sich, je mehr Glieder in Betracht gezogen werden, immer mehr einem endlichen Werthe nähert, hier dem Bruche, welcher in den Decimalbruch verwandelt werden sollte. Man nennt daher eine bestimmte Anzahl von Decimalstellen einen Näherungswerth des gegebenen Bruches, der demselben so nahe kommen kann, als man nur immer will.

Eine Größe, welche kleiner wird, als jede nur angegebene Größe, wie hier die Differenz zwischen dem gewöhnlichen Bruche und dem Decimalbruche, nennt man auch wohl unendlich klein. Das Unendlichkleine ist daher wie das früher (§. 72 flg.) betrachtete Unendlichgroße keine bestimmte Größe, sondern nur die in ein Wort gefaßte Bezeichnung des Werdens. Das Mißverständniß dieser Bedeutung verursachte die in der Geschichte der Mathematik so wichtige Polemik über die Begründung der sogenannten Differentialrechnung.

§. 87.

Bei solchen Approximationsrechnungen hat man zwei Bedingungen zu stellen. Erstens muß man die Rechnung so führen, daß man mittelst derselben jeden beliebigen Grad der Genauigkeit zu erreichen, oder den Fehler, den man begeht, kleiner als jede gegebene noch so kleine Größe zu machen, im Stande ist. Diese Bedingung ist, wie wir sehen, bei unserem Verfahren erfüllt. Zweitens muß man aber auch, wenn man die Näherung bis zu einem gewissen Grade getrieben hat, jederzeit den Grad der erreichten Genauigkeit bestimmen, d. h. die Größe des Fehlers beurtheilen können, welches meistens auf die Weise geschieht, daß man eine Größe angiebt, welche der Fehler nicht erreichen oder wenigstens nicht übersteigen kann, so daß also das Maximum des möglichen Fehlers, die Fehlergrenze angegeben wird.

Auch dieser letzteren Bedingung wird hier genügt. Denn nachdem n Decimalstellen berechnet werden, ist der Fehler $\frac{\alpha}{b \cdot 1^n}$, und weil $\alpha < b$, so ist:

$$\frac{\alpha}{b \, . \, \overset{n}{1}} < \frac{1}{\overset{n}{1}},$$

d. h. der Fehler ist kleiner als eine Einheit von der Ordnung, auf welche sich die letzte Ziffer des Decimalbruches bezieht; oder eine solche Einheit ist die Fehlergrenze.

Diese Fehlergrenze läßt sich jedoch noch um die Hälfte herabsetzen, wenn man den Bruch $\frac{\alpha}{b}$ näher betrachtet. Ist derselbe $< \frac{1}{2}$ so läßt man ihn ohne Weiteres weg; ist er $> \frac{1}{2}$, so vermehrt man die letzte beibehaltene Bruchziffer um eine Einheit. Dann ist man versichert, daß der begangene Fehler nie die Hälfte einer Einheit von der Ordnung der letzten Decimalstelle übersteigt. Und zwar ist bei bloßer Vernachlässigung des Bruches $\frac{\alpha}{b \, . \, \overset{n}{1}}$ der Fehler positiv, bei Erhöhung der letzten Decimalstelle um die Einheit ist er negativ. Mit anderen Worten: im ersten Falle ist der gewöhnliche Bruch größer, im zweiten Falle kleiner als der für denselben gesetzte Decimalbruch.

Anmerkung. Der Fall $\frac{\alpha}{b} = \frac{1}{2}$ kann unberücksichtigt bleiben, weil alsdann bei Anhängung von $n + 1$ Nullen in Zähler und Nenner die Division durch b aufgeht.

§. 88.

Die Erfüllung der im vorigen Paragraphen ausgesprochenen beiden Bedingungen machen das Rechnen mit unendlichen Decimalbrüchen zu einem erlaubten. Auf ihnen beruht es nämlich, daß die beiden Fundamentalsätze von der Vertauschbarkeit der Theile und der Factoren auch bei unendlichen Decimalbrüchen Geltung haben.

Um zunächst den Satz der Addition zu beweisen, seien A, B, C, D . . . unendliche Decimalbrüche, und es möge die Summe derselben eine verschiedene sein, je nachdem sie in der Ordnung $A + B + C + D + ..$ oder etwa in der Ordnung $C + A + D + B + ..$ genommen werden. Die zweite Summe sei z. B. um K größer als die erste; oder

$$A + B + C + D + \ldots = S,$$
$$C + A + D + B + \ldots = S + K.$$

Nun sollen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ entsprechende Näherungswerthe für A, B, C, D ... sein und zwar größere Näherungswerthe; aber doch soll ihre Verschiedenheit von A, B, C, D ... so wenig betragen, daß:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots = S + k,$$
$$\text{wo } k < K.$$

Daß solche Näherungswerthe $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ aber immer gefunden werden können, folgt gerade aus §. 87. Nun ist jedenfalls:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots = \gamma + \alpha + \delta + \beta + \ldots = S + k.$$

Aber aus $k < K$ folgt

$$S + k < S + K$$

oder

$$\gamma + \alpha + \delta + \beta + \ldots < C + A + D + B + \ldots$$

während

$$\gamma > C, \ \alpha > A, \ \delta > D, \ \beta > B, \ldots$$

welches offenbar ein Widerspruch ist. Folglich war der Satz falsch, von dem wir ausgingen. Die Summen $A + B + C + D + \ldots$, $C + A + D + B + \ldots$ können nicht verschieden sein.

§. 89.

Ganz ähnlich wird der zweite Satz von der Multiplication bewiesen.

Es seien wieder A, B, C, D ... unendliche Decimalbrüche und das Product ABCD... ungleich dem Producte CADB...; letzteres sei etwa um L größer als ersteres. Nämlich:

$$ABCD \ldots = P,$$
$$CADB \ldots = P + L.$$

Nun seien wieder $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ die entsprechenden Näherungswerthe, die zwar größer als der wirkliche Werth, aber doch nur so viel größer, daß

$$\alpha\beta\gamma\delta \ldots = P + l,$$
$$\text{wo } l < L.$$

Hier ist:

$$\alpha\beta\gamma\delta \ldots = \gamma\alpha\delta\beta \ldots = P + l.$$

Also:

$$\gamma\alpha\delta\beta\ldots < CADB\ldots,$$

während

$$\gamma > C,\ \alpha > A,\ \delta > D,\ \beta > B,\ldots$$

Dieser Widerspruch zeigt daher die Falschheit der Annahme von der Verschiedenheit der beiden Producte ABCD..., CADB...

Anmerkung. Die in den beiden letzten Paragraphen enthaltenen Begründungen rühren ihrem Wesen nach von Kästner her. Vergl. dessen „Mathematische Anfangsgründe I. Theils erste Abtheilung", Cap. IV, §. 51 (6. Auflage. Göttingen 1800).

§. 90.

Da auf diese Weise die Rechnung mit unendlichen Decimalbrüchen gerechtfertigt erscheint, ist ein näheres Eingehen auf deren Bildungsweise, so weit es hier möglich ist, wünschenswerth.

Die erste Bemerkung, welche zu machen ist, besteht darin, daß bei Verwandlung eines gemeinen Bruches in einen unendlichen Decimalbruch nur eine gewisse Anzahl von Decimalstellen berechnet werden muß, während die folgenden dann unmittelbar ohne Rechnung gegeben sind.

Ist nämlich wieder der Bruch $\frac{a}{b}$ gegeben, so kann die Verwandlung in einen Decimalbruch so erfolgen, daß man mit b in 10a dividirt, wo der Quotient q_1 erscheint und ein Rest a_1 bleibt. An diesen Rest wird eine Null angehängt und dann durch Division mit b in $10a_1$ die zweite Decimalstelle q_2 gesucht. Bei dieser Division bleibe ein Rest a_2, so wird die dritte Decimalstelle q_3 gefunden, wenn man mit b in $10a_2$ dividirt u. s. w. Jeder Rest, der nun bei irgend einer solchen Division übrig bleibt, ist $< b$, kann also nur einen der Werthe 1, 2, 3, ... (b — 1) haben, oder im Ganzen b — 1 verschiedene Werthe. Bei der bten Division muß daher jedenfalls ein Rest erscheinen, der vorher etwa bei der mten Division schon da war, oder es muß sein:

$$a_b = a_m.$$

Daraus folgt aber, daß von nun an dieselben Decimalstellen erscheinen werden, welche durch die mte bis zur bten Division sich

schon ergeben hatten und daß dieselben immer periodisch wiederkehren. Dadurch ist aber die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, daß die Periodicität früher eintritt, d. h. daß schon vor der b ten Division ein früherer Rest und mit ihm alle folgenden wieder auftreten.

$$\text{Z. B.: } \frac{3}{7} = 0{,}428571\ 428571\ldots$$

$$\frac{17}{88} = 0{,}193\ 18\ 18\ 18\ \ldots\ldots$$

§. 91.

Die Periode, d. h. die wiederkehrenden Stellen, heißt je nach der Anzahl der Stellen, aus welchen sie besteht, eine 1, 2, 3 ... nstellige und kann höchstens eine b — 1stellige sein. Z. B. $\frac{3}{7}$ gab eine 6stellige Periode, $\frac{17}{88}$ eine 2stellige Periode. Beginnt die Periode sogleich nach dem Komma, wie bei $\frac{3}{7}$, dessen Periode 428571 ist, so heißt der Decimalbruch ein reinperiodischer. Er entsteht demnach, wenn der erste wiederkehrende Rest dem ursprünglichen Zähler gleich ist. Gehen aber dem Beginne der Periode eine oder mehrere Stellen voraus, welche nicht zur Periode gehören, wie z. B. bei $\frac{17}{88}$, dessen zweistellige Periode 18 erst folgt, nachdem die drei Decimalstellen 193 vorausgegangen sind, so heißt der Decimalbruch ein gemischtperiodischer, der entsteht, wenn der erste wiederkehrende Rest nicht dem ursprünglichen Zähler, sondern irgend einem auf diesen folgenden Reste gleich ist.

Anmerkung. Die Periode wird nach Robertson mitunter dadurch bezeichnet, daß über die Anfangs- und Endziffer derselben ein Punkt gesetzt wird.

$$\text{Z. B.: } \frac{1}{7} = 0{,}\dot{1}4285\dot{7}; \quad \frac{1}{3} = 0{,}\dot{3}; \quad \frac{1}{88} = 0{,}01\dot{1}\dot{3}\dot{6}.$$

§. 92.

Manche Brüche lassen eine schnellere Verwandlung in Decimalbrüche zu, als selbst nach den Bemerkungen des §. 90. Dahin ge-

hören die Brüche, deren Nenner von der Form 10 b — 1 ist, also etwa 9, 19, 29 ... Hat man nämlich den Bruch

$$\frac{a}{10\,b-1},$$

so erhält man bei Ausführung der Division:

$$\frac{a}{10b-1}=\frac{a}{10b}+\frac{a}{10^2.b^2}+\frac{a}{10^3.b^3}+\frac{a}{10^4.b^4}+\dots+\frac{a}{10^n.b^n}+\frac{\frac{a}{10^n.b^n}}{10b-1}$$

Wird n = ∞, so verschwindet der letzte Bruch, d. h. durch die obige Division ist $\frac{a}{10\,b-1}$ in eine unendliche Reihenfolge von Brüchen verwandelt, deren Zähler alle = a, deren Nenner aber nach dem Gesetze fortschreiten, daß jeder derselben aus dem vorhergehenden durch Multiplication mit 10 b gebildet wird. Ist irgend ein Glied der Reihe $\frac{a}{10^m.\,b^m}$, so heißt das folgende

$$\frac{a}{10^{m+1}.\,b^{m+1}} \text{ oder } \frac{\frac{a}{10^m.\,b^m}:b}{10}.$$

In Folge dieser letzten Bemerkung nimmt die Reihe die Gestalt eines unendlichen Decimalbruches an, dessen Ziffern man mittelst folgender Regel erhält: Man findet die erste Ziffer, wenn man a durch b dividirt; die zweite Ziffer erhält man aus der ersten, wenn man diese durch b dividirt; ebenso erhält man die dritte aus der zweiten, wenn man diese durch b dividirt u. s. w. Daß man den jedesmaligen Rest verzehnfacht der betreffenden Decimalstelle zufügt, ehe die Division durch b ausgeführt wird, ergiebt sich unmittelbar aus dem Geiste des decadischen Zahlensystems. Den Anfang der zweiten Periode erkennt man gleichfalls am Wiederauftreten eines früheren Restes wie oben.

Soll z. B. $\frac{1}{239}$ in einen Decimalbruch verwandelt werden, so ist b = 24. Man dividirt also 24 in 1 geht 0 mal, Rest 1; 24 in 10 geht 0 mal, Rest 10; 24 in 100 geht 4 mal, Rest 4; 24 in 44 geht 1 mal, Rest 20; 24 in 201 geht 8 mal, Rest 9; 24 in 98 geht 4 mal, Rest 2; 24 in 24 geht 1 mal, Rest 0; 24 in 1 ist die erste

Division gewesen, es beginnt also hier die Periode von Neuem und der Decimalbruch ist ein reinperiodischer von 7stelliger Periode:

$$\frac{1}{239} = 0{,}0041841\ \ldots\ldots$$

Anmerkung. Ueber diesen Kunstgriff vergl. eine Notiz von Spitzer im 9. Bande von Grunert's Archiv der Mathematik und Physik, S. 117.

§. 93.

Wir stellen uns jetzt rückwärts die Aufgabe, einen unendlichen periodischen Decimalbruch in einen gewöhnlichen Bruch zu verwandeln. Zunächst sei ein $m$stelliger reinperiodischer Bruch zu betrachten, dessen Periode den absoluten Werth P hat. Nach unserer früheren Bezeichnung der Quotienten (§. 90) ist demnach

$$P = 10^{m-1}.\ q_1 + 10^{m-2}.\ q_2 + 10^{m-3}.\ q_3 + \ldots + 10\,q_{m-2} + q_m.$$

Ferner ist:

$$\begin{aligned} 10\,a &= b\,.\,q_1 + a_1 \\ 10\,a_1 &= b\,.\,q_2 + a_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 10\,a_{m-2} &= b\,.\,q_{m-1} + a_{m-1} \\ 10\,a_{m-1} &= b\,.\,q_m + a_m = b\,.\,q_m + a. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen werden in der Reihenfolge, wie sie unter einander stehen, mit 10^{m-1}, 10^{m-2}, ... 10, 1 multiplicirt, so entstehen folgende neue Gleichungen:

$$\begin{aligned} 10^m\ a &= 10^{m-1}\,b\,.\,q_1 + 10^{m-1}\ a_1 \\ 10^{m-1}\,a_1 &= 10^{m-2}\,b\,.\,q_2 + 10^{m-2}.\ a_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 10^2\,a_{m-2} &= 10\ b\,.\,q_{m-1} + 10\,a_{m-1} \\ 10\ a_{m-1} &= b\,.\,q_m + a. \end{aligned}$$

Die Addition dieser sämmtlichen Gleichungen muß offenbar wieder eine richtige Gleichung liefern, d. h. es muß sein:

$$\begin{aligned} &10^m.\ a + 10^{m-1}.\ a_1 + \ldots + 10^2.\ a_{m-2} + 10\,.\,a_{m-1} \\ &= 10^{m-1}\ b\,.\,q_1 + 10^{m-2}\ b\,.\,q_2 + \ldots. + 10\ b\,.\,q_{m-1} \\ &+ b\,.\,q_m + 10^{m-1}.\ a_1 + 10^{m-2}.\ a_2 + \ldots + 10\,a_{m-1} + a. \end{aligned}$$

Und wird davon

$$\begin{aligned} &10^{m-1}.\ a_1 + 10^{m-2}\ a_2 + \ldots + 10^2\ a_{m-2} + 10\,a_{m-1} \\ &= 10^{m-1}\ a_1 + 10^{m-2}\,a_2 + \ldots + 10^2\,a_{m-2} + 10\,a_{m-1} \end{aligned}$$

abgezogen, so muß wieder sein:

$$10^m a = 10^{m-1} . b . q_1 + 10^{m-2} b . q_2 + \ldots + 10 b . q_{m-1} + b . q_m + a.$$

Aber:

$$10^{m-1} b . q_1 + 10^{m-2} b . q_2 + \ldots + 10 b . q_{m-1} + b . q_m = b . P.$$

Demnach ist:

$$10^m a = b . P + a.$$

Wird aber davon $a = a$ abgezogen und die so entstandene Gleichung

$$(10^m - 1) a = b . P$$

durch $(10^m - 1) b$ dividirt, so ist endlich:

$$\frac{a}{b} = \frac{P}{10^m - 1}.$$

Nun ist aber 10^m eine 1 mit m Nullen, wird davon 1 abgezogen, so bleibt $10^m - 1$ eine Zahl, die aus m Neunern besteht.

§. 94.

Daher findet folgende Regel statt: **Um einen reinperiodischen unendlichen Decimalbruch in einen gewöhnlichen Bruch zu verwandeln, nehme man zum Zähler die Periode selbst, zum Nenner eine Zahl, die aus so vielen Neunern besteht, als die Periode Stellen hat.**

Z. B.: $0,31\,31\,31 \ldots = \frac{31}{99}$; $0,666 \ldots = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$;

$$0,19191\ 19191\ 19191 \ldots = \frac{19191}{99999} = \frac{6397}{33333}.$$

§. 95.

Die Verwandlung eines gemischtperiodischen unendlichen Decimalbruches in einen gewöhnlichen Bruch wird so ausgeführt, daß derselbe als Summe eines geschlossenen Bruches und eines aliquoten Theiles eines reinperiodischen Decimalbruches dargestellt wird. Ist z. B. der Decimalbruch

$$0, APPP \ldots.$$

gegeben, wo A die nichtperiodischen Anfangsziffern etwa n an der Zahl, P die mstellige Periode bedeutet, so ist:

$$0, APPP \ldots. = 0,A + \frac{0,PPP\ldots}{10^n} = 0,A + \frac{P}{10^n(10^m - 1)}$$

Z. B.: 0,34126 (7)....
1,10301 (2)....
0,30103 (4)....
5,89547 (8)....

7,64077 ....
7,64081 ....

Die Summe ist $>$ 7,64077 und $<$ 7,64081, also genau in den Stellen 7,640 ...

§. 99.

Bei der Subtraction wird das Doppelresultat folgendermaßen erhalten. Es sei μ der unveränderte Minuend, μ^1 der Minuend mit um die Einheit erhöhter Endziffer. Ebenso seien σ, σ^1 die beiden Näherungswerthe des Subtrahenden und d die genaue Differenz. Nun ist leicht einzusehen, daß $d > \mu - \sigma^1$ und $d < \mu^1 - \sigma$.

Z. B.: 6,42013 (4)...
3,18181 (2)...

3,23831
3,23833.

Die Differenz ist $>$ 3,23831 und $<$ 3,23833, also genau in den Stellen 3,2383 ...

§. 100.

Bei der **Multiplication unendlicher Decimalbrüche** ist auch die nächste Frage nach der Anzahl der Stellen, die in Betracht zu ziehen sind; diese Frage beantwortet sich dadurch, daß von sämmtlichen zu addirenden Partialproducten nach Obigem gleich viele Stellen zu berücksichtigen sind, daß daher solche Stellen, zu welchen, wenn die Factoren genauer bekannt wären, noch Werthstellen hinzuzufügen sind, sämmtlich vernachlässigt werden dürfen, ohne das Resultat ungenauer zu machen. So sind bei dem Producte:

15,767398 ...
3,456 ...

	....
9	4604388 ...
78	816990 ...
630	69592 ....
4730	2194 .....

sämmtliche durch den Verticalstrich abgesonderte Stellen für die Genauigkeit des Resultates nutzlos, weil zu denselben noch andere Theile hinzugekommen wären, wenn die Factoren nicht bloß in so viel Stellen bekannt wären, als von ihnen gegeben sind. Wesentlich sind daher nur noch:

9
78
630
4730

d. h. solche Theile der Partialproducte, welche erscheinen, wenn man vom Multiplicandus nicht mehr Ziffern berücksichtigt, als der Multiplicator hat.

§. 101.

Die Berücksichtigung dieses Umstandes gleich bei der Ausführung der Operation giebt folgende Regel der abgekürzten Multiplication. Man mache Ziffernzahl des Multiplicators und Multiplicandus gleich, multiplicire zuerst mit der Ziffer höchster Ordnung des Multiplicators, lasse dann die Ziffer niederster Ordnung des Multiplicandus weg und multiplicire darauf mit der Ziffer zweithöchster Ordnung des Multiplicators und setze dieses Verfahren durch alle Stellen des Multiplicators fort. Die so entstehenden Partialproducte werden dann so addirt, daß die Ziffern niedrigster Ordnung in allen als von derselben Ordnung betrachtet werden. Wo endlich das Komma hinzusetzen ist, ergiebt eine einfache Betrachtung der ersten Partialmultiplication.

15,76 . . .
3,456 . . .
———
47,28
6 28
75
6
———
54,37.

§. 102.

Das auf diese Weise erhaltene Resultat ist offenbar zu klein. Es muß daher versucht werden, auf möglichst einfache Weise ein

anderes Resultat zu finden, welches zu groß ist. Die Art des Verfahrens mag am vorigen Beispiele erläutert werden.

Das dortige Resultat war:

$$3 . 15{,}76 + 0{,}4 . 15{,}7 + 0{,}05 . 15 + 0{,}006 . 10,$$

während das vollständige Resultat:

$$3 . 15{,}76 + 0{,}4 . 15{,}76 + 0{,}05 . 15{,}76 + 0{,}006 . 15{,}76 + \\ + r . 15{,}76 + (3{,}456 + r) . r^1$$

ist, wo r die fehlenden Decimalstellen des Multiplicators 3,456, r^1 die fehlenden Decimalstellen des Multiplicandus 15,76 bedeutet.

Nun ist: $15{,}76 = 15{,}76$, also: $3 . 15{,}76 = 3 . 15{,}76$

$$\begin{array}{lll} 15{,}8 > 15{,}76 & & 0{,}4 . 15{,}8 > 0{,}4 . 15{,}76 \\ 16 > 15{,}76 & & 0{,}05 . 16 > 0{,}05 . 15{,}76 \\ 20 > 15{,}76 & & 0{,}006 . 20 > 0{,}006 . 15{,}76 \\ 0{,}001 > r & & 0{,}001 . 20 > r . 15{,}76 \\ 0{,}01 > r^1 & & 4 . 0{,}01 > (3{,}456 + r) . r^1. \end{array}$$

Wir finden demnach:

$$3 . 15{,}76 + 0{,}4 . 15{,}8 + 0{,}05 . 16 + 0{,}006 . 20 + 0{,}001 . 20 + 4 . 0{,}01 > \\ (3{,}456 + r)\ (15{,}76 + r^1).$$

Dieses größere Resultat wird daher gefunden, wenn zu dem kleineren Resultate noch Folgendes addirt wird:

$$0{,}4 . 0{,}1 + 0{,}05 . 1 + 0{,}006 . 10 + 0{,}001 . 20 + 4 . 0{,}01.$$

Wir nehmen, um diese Summe zu finden, sämmtliche Ziffern des Multiplicators und schreiben sie untereinander, außerdem die höchststellige Ziffer des Multiplicandus und zwei Einheiten.

In unserem Beispiele fanden wir:

$$3{,}456 \ldots \times 15{,}76 \ldots > 54{,}37.$$

Nun ist nach der eben gefundenen Regel:

$$3 + 4 + 5 + 6 + 1 + 2 = 21,$$

also

$$3{,}456 \ldots \times 15{,}76 \ldots < 54{,}58$$

und mit Genauigkeit ist das Product 54, ...

Anmerkung. Um zwei möglich übereinstimmende Grenzen zu erhalten, wird man daher bei der abgekürzten Multiplication gut daran thun, denjenigen Factor zum Multiplicator zu wählen, dessen Ziffern zusammen mit der höchststelligen Ziffer des anderen Factors die kleinste Summe bilden. So giebt $1{,}3012 \ldots \times 17{,}856 \ldots = 23{,}23 \ldots$, während $17{,}856 \ldots \times 1{,}3012 \ldots = 23{,}2 \ldots$ giebt.

§. 103.

Auch bei der Division unendlicher Decimalbrüche lassen sich abgekürzte Methoden einführen, wovon die älteste folgende von Oughtred herrührende ist.

Nach dieser dividirt man nämlich nur das erste Mal mit dem ganzen Divisor und läßt dann, von der niedrigsten Ordnung desselben anfangend, immer eine Stelle weg, statt eine neue Stelle des Dividenden in Betracht zu ziehen.

Z. B.: 15,32104 . . . : 3,30103 = 4,64129

13 20412		
2 11692	:	33010
1 98060		
13632	:	3301
13204		
428	:	330
330		
98	:	33
66		
32	:	3
27		

Der so erscheinende Quotient ist aus leicht begreiflichen Gründen immer zu groß.

§. 104.

Einen zu kleinen Quotienten hingegen erhält man, wenn die jedesmalige Endziffer der Divisoren um 1 erhöht wird. Auf diese Weise nimmt das vorige Beispiel folgende Gestalt an:

15,32104 : 3,30104 = 4,64123

13 20416		
2 11688	:	3,3011
1 98066		
13622	:	3,302
13208		
414	:	331
331		
83	:	34
68		

```
15 : 4
12
```

Genau ist somit das Resultat in den Stellen 4,6412 . . .

§. 105.

Eine aus beiden Divisionsarten gemischte Methode giebt häufig ein sehr genaues Resultat; wenn nämlich der Divisor nach Abwerfen einer Ziffer unverändert bleibt, falls die abgeworfene Ziffer < 5 war, hingegen in der letzten Stelle um 1 erhöht wird, wenn die abgeworfene Ziffer $\geqq 5$ war.

```
Z. B.: 16,42309 : 103,9476 = 0,1579941
       10 39476
        6 02833 : 103948
        5 19740
          83093 : 10395
          72765
          10328 : 1039
           9351
            977 : 104
            936
             41 : 10
             40
              1 : 1
              1
```

Die Anwendung der beiden Methoden würde ergeben, daß der Quotient zwischen 0,1579921 und 0,1579962 liegt.

§. 106.

Bei aller Kürze besitzen diese Methoden zu wenig Sicherheit für die Genauigkeit des Quotienten, als daß sie ausreichen könnten. Eine sehr schöne Methode, welche beide Vorzüge vereinigt, wurde von Fourier in der Analyse des équations déterminées, Paris 1830, pag. 187, unter dem Namen der geordneten Division angegeben.

Das Princip derselben besteht darin, daß zur Bildung der Stellen höchster Ordnung des Dividenden nur die Stellen höchster

Ordnung des Divisors und Quotienten beigetragen haben; daß also zu Anfange der Division nur die Stellen höchster Ordnung im Divisor und Dividenden berücksichtigt zu werden brauchen und in Bezug auf die späteren Stellen allmälige Verbesserungen vorgenommen werden.

§. 107.

Zur genaueren Auseinandersetzung der Fourier'schen Methode gehen wir von der Multiplication zweier decadisch geschriebenen Zahlen $\overset{4}{1}.a + \overset{3}{1}.b + \overset{2}{1}.c + \overset{1}{1}.d + \overset{0}{1}.e$ und $\overset{3}{1}.\alpha + \overset{2}{1}.\beta + \overset{1}{1}.\gamma + \overset{0}{1}.\delta$ aus, deren Product wir dann als Dividenden, den einen Factor als Divisor betrachten wollen.

Die unmittelbare Multiplication giebt als jenes Product:

$$\begin{aligned}
&\overset{7}{1}.a\alpha + \overset{6}{1}.b\alpha + \overset{5}{1}.c\alpha + \overset{4}{1}.d\alpha + \overset{3}{1}.e\alpha \\
&\quad + \overset{6}{1}.a\beta + \overset{5}{1}.b\beta + \overset{4}{1}.c\beta + \overset{3}{1}.d\beta + \overset{2}{1}.e\beta \\
&\qquad + \overset{5}{1}.a\gamma + \overset{4}{1}.b\gamma + \overset{3}{1}.c\gamma + \overset{2}{1}.d\gamma + \overset{1}{1}.e\gamma \\
&\qquad\quad + \overset{4}{1}.a\delta + \overset{3}{1}.b\delta + \overset{2}{1}.c\delta + \overset{1}{1}.d\delta + \overset{0}{1}.e\delta
\end{aligned}$$

welches also durch $\overset{4}{1}.a + \overset{3}{1}.b + \overset{2}{1}.c + \overset{1}{1}.d + \overset{0}{1}.e$ dividirt werden soll. Dazu berücksichtigt man vorläufig nur die Stellen $\overset{4}{1}.a + \overset{3}{1}.b$ des Divisors, welche man überstreicht und den überstrichenen Divisor nennt. Ebenso überstreichen wir so viele Anfangsziffern des Dividenden, als nothwendig sind, damit durch den überstrichenen Divisor dividirt werden könne und nennen diese Anfangsziffern den ersten partiellen Dividend. Nun wird die höchste Stelle α des Quotienten gesucht und deren Ordnung $\overset{3}{1}$ aus der Ziffernzahl des vollständigen Divisors und Dividenden bestimmt. Das Product $\overset{7}{1}.a\alpha + \overset{6}{1}.b\alpha$ wird vom partiellen Dividenden abgezogen und dem Reste die nächste Ziffer des Dividenden beigefügt, wodurch ein zweiter partieller Dividend gebildet werden soll. Vorher muß aber eine Verbesserung in Bezug auf die Ziffer $\overset{2}{1}.c$ des Divisors angebracht werden, nämlich man muß noch $\overset{6}{1}.c\alpha$ abziehen. Aus der Ansicht des Dividenden erhellt, daß jetzt der

zweite verbesserte partielle Dividend mit $\overset{6}{1}.a\beta+\overset{5}{1}.(b\beta+a\gamma)$ anfängt, woraus also durch Division mit dem überstrichenen Divisor die zweite Ziffer $\overset{2}{1}.\beta$ des Quotienten sich ergiebt. Nach Subtraction von $\overset{6}{1}.a\beta + \overset{5}{1}.b\beta$ wird die folgende Ziffer des Dividenden herabgezogen und die Correction in Bezug auf die nächstliegenden noch nicht berücksichtigten Theile des Divisors angebracht. Diese besteht in $\overset{4}{1}.c\beta + \overset{4}{1}.d\alpha$. So erhält man den dritten partiellen Dividend und kann die Rechnung fortsetzen, so weit man will.

§. 108.

Die Regel der geordneten Division, wie sie Fourier ausspricht, ist daher folgende: Man bezeichnet eine, zwei, drei . . . Anfangsziffern des Divisors und nennt dieselben den überstrichenen Divisor. Dann dividirt man den gegebenen Dividenden durch den überstrichenen Divisor nach einem Verfahren, welches von dem gewöhnlichen nur in dem Punkte abweicht, daß, so oft eine neue Ziffer des Dividenden dem Reste der vorhergehenden Division beigefügt wird, dieser neue partielle Dividend eine Correction zu erleiden hat. Die Correction, welche abzuziehen ist, findet man aber, indem die m schon bekannten Stellen des Quotienten in umgekehrter Reihenfolge unter die m Stellen des Divisors gesetzt werden, welche nach dem überstrichenen Divisor folgen, worauf man je zwei über einander stehende Zahlen multiplicirt und diese m Producte addirt. Kann die Correction nicht angebracht werden, so beweist dieses, daß die vorige Stelle des Quotienten zu groß angenommen wurde, und die Rechnung ist darnach zu wiederholen, indem man jene Stelle um die Einheit verringert.

§. 109.

Bisweilen kann man a priori entscheiden, ob die Verbesserung angebracht werden kann, die letzte Ziffer des Quotienten also sicher ist. Die erste Correction bestand in der Subtraction $\overset{6}{1}.a\beta - \overset{5}{1}.c\alpha$. Diese ist möglich, wenn $\overset{6}{1}.a\beta \geqq \overset{5}{1}.c\alpha$ oder $10a\beta \geqq c\alpha$ und (da $c < 10$) jedenfalls, wenn $a\beta \geqq \alpha$, d. h. wenn der Rest

größer oder gleich der gefundenen Ziffer des Quotienten ist. Die zweite Correction bestand in der Subtraction $\overset{5}{1} \,.\, a\gamma - \overset{4}{1}\,(c\beta + d\alpha)$. Diese ist möglich, wenn $10\,a\gamma \geqq c\beta + d\alpha$, und um so mehr, wenn $a\gamma \geqq \beta + \alpha$, d. h. wenn der Rest größer oder gleich der Summe der beiden Ziffern des Quotienten ist.

Allgemein kann man von der Möglichkeit der Correction überzeugt sein, wenn die Summe sämmtlicher Ziffern des Quotienten kleiner oder gleich dem folgenden partiellen Dividenden ist, bevor eine neue Ziffer herabgezogen wurde. Findet aber dieses Criterium nicht statt, so kann nur die wirkliche Subtraction entscheiden, ob die Correction möglich ist oder nicht.

§. 110.

Soll nach dieser Methode die Division 16,42309 : 103,9476 ausgeführt werden, so kann man etwa $\overline{103}$ zum überstrichenen Divisor nehmen. Dann ist die Ausführung folgende:

16,42309 : $\overline{103}$,9476 = 0,15 (80) 799
103
612 (61 > 1, also 1 sicher)
9 = 1 . 9 (Verbesserung)
603
515
883 (88 > 1 + 5, also 5 sicher)
49 = 5 . 9 + 1 . 4 (Verbesserung)
834
824
100 (10 < 1 + 5 + 8, also 8 ungewiß)
99 = 8 . 9 + 5 . 4 + 1 . 7 (Verbesserung läßt sich anbringen)
1
0
19 (1 < 1 + 5 + 8 + 0, also 0 ungewiß)
73 = 0 . 9 + 8 . 4 + 5 . 7 + 1 . 6 (Verbesserung läßt sich nicht anbringen, also sind die beiden letzten Stellen 80 zu groß und es ist zunächst 7 statt 8 zu setzen).

```
  721
 1130  (113 > 1 + 5 + 7, also 7 sicher)
   90 = 7.9 + 5.4 + 1.7 (Verbesserung)
 1040
  927
 1139  (113 > 1 + 5 + 7 + 9, also 9 sicher)
  150 = 9.9 + 7.4 + 5.7 + 1.6 (Verbesserung)
  989
  927
   62. (62 > 1 + 5 + 7 + 9 + 9, also 9 sicher.)
```

Da keine weiteren Decimalstellen des Dividenden bekannt sind, so können freilich nach dieser Methode keine weiteren Stellen des Quotienten gefunden werden. Dafür sind aber die gefundenen sicher.

Anmerkung 1. Das erste deutsche Werk, in welches Fourier's geordnete Division überging, ist: Drobisch, Grundzüge der Lehre von den höheren numerischen Gleichungen, Leipzig 1834; das erste französische: Finck, Traité élémentaire d'arithmétique, Strassbourg 1841.

Anmerkung 2. Noch andere abgekürzte Divisionsmethoden wurden von verschiedenen französischen Mathematikern angegeben. So von Guy (la division abrégée, Paris 1845), Finck (Nouvelles annales de Mathématiques, Tome IV), Crosson (Nouvelles annales de Mathématiques, Tome V) u. s. w.

Von den Kettenbrüchen.

§. 111.

Eine andere Form von Brüchen, welche noch erwähnt werden müssen, sind die Kettenbrüche, worunter man solche Brüche versteht, deren Zähler eine ganze Zahl, deren Nenner aber eine gemischte Zahl ist, d. h. die Summe einer ganzen Zahl und eines Bruches, der selbst wieder ein Kettenbruch sein kann; wo also einzelne Brüche (Theilbrüche) wie die Glieder einer Kette in einander verschlungen sind.

Z. B.: $\cfrac{3}{4+\cfrac{2}{5}}$, $\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{8}}}$, $\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\vdots+\cfrac{b_n}{a_n}}}$

§. 112.

Die Erfindung der Kettenbrüche ist noch jüngeren Datums als die der Decimalbrüche: Als Erfinder gilt nämlich Lord Brouncker, um 1660 der erste Präsident der royal society of London. Dann beschäftigte sich Huyghens (Chr. Hugenius) näher mit ihrer Theorie in seinem horologium oscillatorium, 1676. Von allgemeinerer Wichtigkeit ist eine Abhandlung von Leonhard Euler im IX. Bande der Commentare der Petersburger Academie von 1737. Als neuere Arbeiten sind zu nennen: Kaußler, die Lehre von den continuirlichen Brüchen, Stuttgart 1803, und besonders Stern, Theorie der Kettenbrüche, Berlin 1833.

§. 113.

Die Elementararithmetik beschäftigt sich hauptsächlich mit solchen Kettenbrüchen, in welchen sämmtliche b, also $b_1, b_2, \ldots b_n$, welche man Theilzähler nennt, der Einheit gleich sind, während die $a_1, a_2, \ldots a_n$, welche Theilnenner heißen, irgend ganze positive Zahlen sind.

Die Art, zu einem solchen Kettenbruche zu gelangen, ist verschieden. Am häufigsten läßt man ihn so entstehen, daß irgend ein gegebener Bruch durch den Zähler verkleinert werden soll. Dadurch erhält er eine neue Form, in welcher der Zähler 1 ist, während der Nenner als eine gemischte Zahl geschrieben wird. Der gebrochene Theil des Nenners wird nun ganz nach demselben Principe in eine andere Form gebracht und diese Methode fortgesetzt, bis endlich der Theilzähler im zugehörigen Theilnenner aufgeht, was jedenfalls einmal eintreffen muß, wenn, wie es aus der Operation hervorgeht, die Theilzähler immer kleiner werden und schließlich jedenfalls den Werth 1 erreichen müssen, wenn es nicht früher eintrifft, daß der Theilzähler ein aliquoter Theil des Theilnenners ist. Damit ist also die Aufgabe gelöst, *einen gemeinen Bruch in einen Kettenbruch zu verwandeln.*

Z. B.: $$\frac{17}{37} = \frac{1}{2+\frac{3}{17}} = \frac{1}{2+\frac{1}{5+\frac{2}{3}}} = \frac{1}{2+\frac{1}{5+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}$$

Anmerkung. Man vergleiche das Verfahren, um den größten gemeinschaftlichen Divisor zweier Zahlen zu finden (§. 63).

§. 114.

Die umgekehrte Aufgabe bildet *die Verwandlung eines Kettenbruches in einen gemeinen Bruch.* Die Verfahrungsweise ist die, daß zuerst der letzte gemischte Nenner in einen unächten Bruch verwandelt und durch denselben wirklich in die 1 dividirt wird, was durch Umkehrung des Bruches geschieht, worauf dieselbe Operation immer weiter fortgesetzt wird.

Z. B.: $$\frac{1}{5+\frac{1}{4+\frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{1}{1}}}}} = \frac{1}{5+\frac{1}{4+\frac{1}{3+\frac{1}{3}}}} = \frac{1}{5+\frac{1}{4+\frac{3}{10}}} = \frac{1}{5+\frac{10}{43}} = \frac{43}{225}$$

Man fängt bei diesem Verfahren am letzten Gliede der Kette an und zieht immer mehrere in Betracht. Daher nennt man diese Operation die Aufwicklung eines Kettenbruches. Ein anderes Verfahren, welches von den ersten Gliedern des Kettenbruches anfängt, wird in der Analysis gelehrt, wo auch von den sonstigen Eigenschaften der Kettenbrüche, besonders von den unendlichen Kettenbrüchen gehandelt wird.

Von den Potenzen.

---

§. 115.

Schon bei der Multiplication (§. 38) führten wir die abgekürzte Schreibart a^k ein, welche das Product aus k Factoren bezeichnet, deren jeder gleich a ist. Diese Schreibart wird uns die Grundlage einer neuen Operation, des Potenzirens.

Potenziren nennen wir vorläufig eine gegebene Zahl a so vielmal als Factor setzen, als eine andere gegebene Zahl k anzeigt.

Das Resultat dieser Operation heißt Potenz (oder bei einigen Schriftstellern Potestät, auch Dignität), die Zahl a, welche also die Factoren bildet, heißt Basis, und die Zahl k, welche angiebt, wie viele solcher Factoren zu nehmen sind, Exponent.

Die Bezeichnung ist wie früher

$$a^k$$

und wird ausgesprochen: **a** hoch **k**, **a** in der **k**ten, **a** zur Potenz **k** u. s. w., lauter der Bedeutung nach identische und leicht verständliche Ausdrücke.

Anmerkung 1. Für die zweite und dritte Potenz sind noch die geometrischen Begriffen entlehnten besonderen Namen Quadrat und Cubus im Gebrauch. Also;

$$a^2 = a \text{ Quadrat}, \quad a^3 = a \text{ Cubus}.$$

Anmerkung 2. Historische Bemerkungen über die Bezeichnung vergl. §. 132.

§. 116.

Um nun die Prüfung der bisherigen Rechnungsoperationen an den Potenzen vorzunehmen, bemerken wir, daß die Addition und Subtraction nur dann mehr als bloß angedeutet werden kann, wenn in beiden Potenzen dieselbe Basis und derselbe Exponent vorkommt, widrigenfalls es nämlich heterogene Größen sind. Sind aber die Potenzen identisch, so wird die Addition (Subtraction) mittelst der Coefficienten vollzogen, wie immer, wenn es sich um Buchstabenausdrücke handelt.

Z. B.: $4a^2 + 3a^3 - 2a^2 - 6a^3 + 10a^2 = 12a^2 - 3a^3$

$$a^m + 4a^m + ba^m - 3fa^m = (5 + b - 3f)a^m.$$

§. 117.

Bei der Multiplication von Potenzen ist zu unterscheiden, ob sowohl Basis als Exponent verschieden ist, oder ob bei verschiedener Basis der Exponent gleich ist, oder ob die Basis gleich ist, wobei es auf Gleichheit oder Verschiedenheit des Exponenten nicht ankommt.

Im ersten Falle kann die Multiplication bloß an den Zahlencoefficienten ausgeführt werden.

Z. B: $3a^2 \times 5b^3 = 15a^2b^3$.

Im zweiten Falle kann die Schreibweise dahin verändert werden, daß der Exponent dem Producte der einzelnen Grundgrößen beigesetzt wird.

Z. B.: $7a^3 \times 3b^3 = 21a^3b^3 = 21(ab)^3$.

Im dritten Falle endlich, wenn a^m mit a^n multiplicirt werden soll, so heißt dieses das Product aus m Factoren, deren jeder $= a$ soll nochmals mit n Factoren, deren jeder $= a$ multiplicirt werden; im Ganzen sind demnach $m + n$ Factoren vorhanden, deren jeder $= a$, was nach der Definition der Potenz durch a^{m+n} bezeichnet wird. Also ist:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}.$$

Z. B.: $6a^2 \times 14a^5 \times 3a \times \frac{1}{21}a^3 = 12a^{11}$.

§. 118.

Wird in dem zuletzt entwickelten Satze $m + n = r$ gesetzt, so ist $n = r - m$ und der Satz heißt:

$$a^m \times a^{r-m} = a^r.$$

Wird nun noch durch a^m dividirt, so ist:

$$\frac{a^r}{a^m} = a^{r-m}.$$

Damit ist aber die Regel für die Division solcher Potenzen gegeben, welche dieselbe Basis haben, daß der Exponent des Divisors von dem Exponenten des Dividenden subtrahirt werden muß, um den Exponenten des Quotienten zu finden.

Für die anderen beiden Fälle, welche dem ersten und zweiten Falle des vorigen Paragraphs entsprechen, gelten ganz ähnliche Regeln wie dort. Im ersten Falle kann die Division nur an den Coefficienten ausgeführt werden; im zweiten kann der Quotient der Potenzen als Potenz des Quotienten der Grundgrößen dargestellt werden.

Z. B.: $14\,a^3 : 7\,b^2 = 2\,\frac{a^3}{b^2}$

$$16\,a^3 : 4\,b^3 = 4\,\frac{a^3}{b^3} = 4\left(\frac{a}{b}\right)^3$$

$$21\,a^6 : 17\,a^4 = \frac{21}{17}\,a^2.$$

§. 119.

Eine Potenz kann ferner wieder potenzirt werden. Dann bedeutet $(a^m)^n$, es sollen n Factoren mit einander multiplicirt werden, deren jeder a^m oder $(a^m)^n = a^m.\,a^m.\,a^m \ldots$ (n Factoren). Deren Product ist aber nach §. 117: $a^{m+m+m+\ldots(n\,mal)}$, oder:

$$(a^m)^n = a^{n\,m}.$$

Durch ähnliche Betrachtungen wird auch

$$(a^n)^m = a^{m\,n},$$

daher ist

$$(a^m)^n = (a^n)^m.$$

§. 120.

In Worten ausgedrückt heißen die letzten Sätze so: Es ist gleichgültig, ob man eine Zahl a auf einmal zur $m \times n$ten Potenz

erhebt, oder ob man den Exponenten $m \times n$ in seine Factoren m und n zerlegt und a zuerst auf die Potenz des einen Factors m und die so entstehende Zahl auf die Potenz des anderen Factors n erhebt, oder endlich ob man nach Zerlegung von $m \times n$ in seine Factoren die Potenzirungen in irgend einer anderen Reihenfolge vornimmt.

§. 121.

Besteht die zu potenzirende Zahl aus mehreren ungleichen Factoren, so ist (wegen §. 117) jeder Factor für sich zu potenziren, bei Brüchen Zähler und Nenner für sich (§. 118).

Z. B.: $(a^m \cdot b^n \cdot c^r)^p = a^{mp} \cdot b^{np} \cdot c^{rp}$

$$\left(\frac{a^m}{b^n}\right)^p = \frac{a^{mp}}{b^{np}}.$$

Besteht die zu potenzirende Zahl aus mehreren Theilen, so kann man vom elementaren Standpunkte der Arithmetik aus Nichts weiter bemerken, als daß die Ausführung der Multiplication zeigt, wie sehr man sich hüten muß, die Summe der Potenzen der einzelnen Theile mit der Potenz der Summe zu verwechseln.

Z. B.: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2.$

§. 122.

Zur Betrachtung der Division zurückkehrend, welche, wie wir fanden, durch Subtraction der Exponenten ausgeführt wird, sehen wir, daß gerade durch diese Operation, wofern wir sie unumschränkt ausführen wollen, die bisherige Definition der Potenz ungenügend wird. Ist nämlich der Exponent des Divisors größer als der des Dividenden, so wird, wenn wir nach der gefundenen Regel verfahren, der Exponent des Quotienten negativ, und ein solcher Ausdruck a^{-n} hat nach unserer bisherigen Definition der Potenz keinen Sinn. Denn was soll es heißen, wenn man sagt: a soll $-n$ mal als Factor gesetzt werden?

§. 123.

Da wir durch die Division auf diesen vorerst sinnlosen Ausdruck gekommen sind, so muß die Division uns auch seine Bedeutung

klar machen. Gesetzt wir haben die Potenz a^m durch a^{m+n} zu dividiren, so ist der Quotient der Bruch $\frac{a^m}{a^{m+n}}$. Indem wir diesen durch seinen Zähler a^m verkleinern, erhalten wir:

$$a^m : a^{m+n} = \frac{1}{a^{m+n-n}} = \frac{1}{a^n}.$$

Andererseits wäre bei Ausführung der Division durch Subtraction der Exponenten:

$$a^m : a^{m+n} = a^{m-(m+n)} = a^{-n}.$$

Folglich muß

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

sein, oder die Bedeutung einer Potenz mit negativen Exponenten ist Nichts anderes, als das Reciproke der Potenz mit demselben, aber positiven Exponenten.

Ferner ist $\frac{a^m}{a^m} = 1$, andererseits $a^m : a^m = a^{m-m} = a^0$, also

$$a^0 = 1$$

oder die nullte Potenz irgend einer bestimmten Zahl a ist der Einheit gleich.

Anmerkung 1. Ist $a = 0$ oder $a = \infty$, so gilt der zuletzt ausgesprochene Satz nicht. Denn

$$0^0 = 0 \cdot \frac{1}{0} = \frac{0}{0}$$

sowie

$$\infty^0 = \infty \cdot \frac{1}{\infty} = \frac{\infty}{\infty}$$

sind unbestimmte Ausdrücke (§. 75).

Anmerkung 2. Man sieht jetzt leicht, daß die Indices, welche bisher den Rang der Ziffern bezeichneten, Nichts anderes als Exponenten von Potenzen der Grundzahl 10 des Zahlensystemes sind, und daß daher die Einer den Index 0, die Decimalstellen negative Indices haben mußten.

§. 124.

Nachdem auf diese Weise ein Sinn der Potenzen mit negativem Exponenten und mit dem Exponenten Null gefunden, muß demgemäß

die Definition des Potenzirens umgeändert werden, so daß aus ihr derselbe Sinn sich ergiebt.

Diese umgeänderte Definition läßt sich so aussprechen: Potenziren heißt eine Zahl so aus der Basis als Factor bilden, wie der Exponent aus der Einheit als Theil entstanden ist.

§. 125.

Bei der Anwendung dieser Definition ist noch eine Bemerkung zu machen, welche sich fast von selbst ergiebt. Eine negative Zahl — n entsteht aus der Einheit, indem die derselben entgegengesetzte Einheit n mal genommen wird. Bei der Bildung der Potenz zum negativen Exponenten — n ist daher das Entgegengesetzte der Basis als Factor zu bilden und dann n mal als Factor zu setzen. Das einem Factor Entgegengesetzte kann aber Nichts anderes bedeuten, als einen Divisor. Es ist daher mit der Basis n mal zu dividiren, d. h. mit ihrem Reciproken n mal zu multipliciren.

Folglich ist

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n},$$

wie es verlangt wurde.

§. 126.

Auch a^0 kann definitionsgemäß entwickelt werden. Null entsteht als Summe der Einheit und der ihr entgegengesetzten Einheit. Folglich entsteht a^0 als Product der Basis a und dessen Reciproken $\frac{1}{a}$ oder:

$$a^0 = a \cdot \frac{1}{a} = 1.$$

In etwas anderen Worten ausgedrückt heißt die letztere Entwicklung folgendermaßen: Wenn wir die positive und die negative Einheit als Summe zusammenfassen, so heben sie sich gegenseitig auf und geben eine Summe Null, welche zu jeder Größe addirt und von jeder Größe subtrahirt werden kann, ohne sie zu verändern. Die Potenz a^0 muß daher aus Factoren gebildet werden, welche sich in der Art in ihrer Wirkung neutralisiren, daß sie ein Product geben, mit welchem jede Größe multiplicirt, durch welche jede Größe

dividirt werden kann, ohne sich zu verändern. Diese Bedingung erfüllt aber nur die Zahl 1, folglich muß sich ergeben $a^0 = 1$.

§. 127.

Ebenso wie der Exponent eine negative ganze Zahl sein kann, können wir uns auch denken, daß derselbe ein positiver oder negativer Bruch wäre, und würden alsdann zu fragen haben, was wohl die Bedeutung einer solchen Potenz mit gebrochenen Exponenten wäre? Der Weg, den wir dabei einschlagen, ist folgender: Ein gebrochener Exponent kann nur als entstanden gedacht werden, indem ein ganzer Exponent dividirt wurde. Division ist aber die der Multiplication entgegengesetzte Operation, folglich wird ein gebrochener Exponent uns die entgegengesetzte Operation von derjenigen vorstellen müssen, bei welcher der Exponent mit einer anderen Zahl multiplicirt wird. Letzteres fand sich bei dem wiederholten Potenziren einer Potenz (§. 119). Ein gebrochener Exponent wird daher das Entgegengesetzte dieser Operation auszudrücken haben, eine Operation, die wir demnach vorläufig als Depotenzirung bezeichnen können, wenn wir auch noch nicht wissen, worin sie besteht.

§. 128.

Es ist also die nächste Aufgabe: das Wesen der Depotenzirung deutlich zu machen.

Wir hatten $(a^m)^n = a^{mn}$ oder wenn $mn = p$, $m = \frac{p}{n}$ gesetzt wird:

$$\left(a^{\frac{p}{n}}\right)^n = a^p.$$

Somit ist $a^{\frac{p}{n}}$ die Zahl, welche auf die $n$te Potenz erhoben werden muß, um a^p zu erhalten. Wir sagen dafür $a^{\frac{p}{n}}$ sei die $n$te Wurzel von a^p und schreiben dieses:

$$a^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{a^p}.$$

Dabei nennen wir n den Exponenten der Wurzel, sowie die Operation, vermittelst welcher hier $a^{\frac{p}{n}}$ gefunden wird, Wurzelausziehung oder Radicirung. Diese Operation, welche uns

Potenzen mit gebrochenen Exponenten liefert, ist in der That die entgegengesetzte Operation des Potenzirens, oder was wir vorher als Depotenzirung bezeichneten. Der Gegensatz läßt sich nämlich so aussprechen: Beim Potenziren war Basis und Exponent gegeben, man suchte die Potenz; beim Radiciren ist Potenz und Exponent gegeben, man sucht die Basis.

Anmerkung. Sowie die zweite und dritte Potenz besondere Namen führen (§. 115), so heißt auch die zweite Wurzel Quadratwurzel, die dritte Cubikwurzel, wobei noch zu bemerken ist, daß beim Schreiben der Quadratwurzel der Exponent der Wurzel weggelassen wird:

$$\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}.$$

§. 129.

Es bleibt noch zu untersuchen, in wie fern diese Bedeutung der Potenz mit gebrochenem Exponenten sich mit der früher gegebenen Definition verträgt.

Ist $a^{\frac{m}{n}}$ gegeben, so ist zu fragen, wie $\frac{m}{n}$ aus der Einheit als Theil entstanden ist. Die Entstehungsweise ist so, daß die Einheit nach dem Maße n verändert wurde (in n gleiche Theile getheilt wurde) und man m solcher Theile zusammenfaßte. Analog wird mit a als Factor zu verfahren sein. Wie die Einheit in n gleiche Theile, ist a in n gleiche Factoren zu zerlegen, deren jeder $\sqrt[n]{a}$; und wie dann m jener Theile zusammengefaßt wurden, sind hier m solcher Factoren zu vereinigen, oder es ist:

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

Die Bildungsweise von $\frac{m}{n}$ aus der Einheit kann auch so aufgefaßt werden, daß man sie mmal setzte und den nten Theil dieser Summe nahm. Nach dieser Auffassung ist a jetzt mmal als Factor zu setzen und dieses Product a^m in n gleiche Factoren zu zerlegen. Dann ist

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Diese letztere Auffassung giebt auch formell dasselbe wie die Betrachtungen des vorigen Paragraphs, beweist also die Gültigkeit unserer Definition.

§. 130.

Ganz ähnlich läßt sich aus der Definition auch herleiten:

$$a^{-\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{\tfrac{1}{a}}\right)^m$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^{-m}}$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

Unsere Definition ist daher jetzt für alle Exponenten, positive wie negative, ganze wie gebrochene, stichhaltig.

Anmerkung. Aus den verschiedenen Betrachtungen der vorigen Paragraphen ergeben sich die leicht in Worte zu kleidende, den Sätzen des §. 120 analoge Gleichungen:

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

$$\sqrt[n]{a^{-m}} = \left(\sqrt[n]{a^{-1}}\right)^m = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

§. 131.

Es ist hier nur noch zu zeigen, daß auch für Potenzen mit gebrochenen Exponenten dieselben Multiplicationsregeln gelten und somit auch dieselben Divisionsregeln, welche früher unter Voraussetzung einer anderen Definition für Potenzen mit ganzen positiven Exponenten entwickelt wurden, und deren Gültigkeit bei ganzen negativen Exponenten von selbst einleuchtet, da wir gerade vermittelst dieser Regeln zu negativen Exponenten gelangten.

Es sei $a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}}$ zu multipliciren, so schreiben wir vorläufig wegen $\frac{m}{n} = \frac{mq}{nq}$ und $\frac{p}{q} = \frac{np}{nq}$:

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mq}{nq}} = \left(a^{\frac{1}{nq}}\right)^{mq}$$

$$a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{np}{nq}} = \left(a^{\frac{1}{nq}}\right)^{np}$$

und indem $a^{\frac{1}{nq}} = b$ gesetzt wird:

$$a^{\frac{m}{n}} = b^{mq}, \quad a^{\frac{p}{q}} = b^{np}.$$

$$\text{Aber } b^{mq} \times b^{np} = b^{mq+np} = \left(a^{\frac{1}{nq}}\right)^{mq+np} = a^{\frac{mq+np}{nq}} \text{ oder:}$$

$$a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}.$$

Daß für Potenzen mit gebrochenen Exponenten die Potenzirungsregeln noch gelten, braucht aus demselben Grunde nicht bewiesen zu werden, aus welchem wir die Richtigkeit der Multiplicationsregeln für Potenzen mit negativen Exponenten beanspruchten.

§. 132.

Die früheste äußerst schwerfällige Bezeichnung der Potenzen bei den Italienern beschränkte sich auf Potenzen mit ganzen positiven Exponenten und erfolgte durch die Anfangsbuchstaben q. und c. der Wörter quadrato, cubo. Darnach war:

$$a\ q. = a^2; \quad a\ c. = a^3; \quad a\ q.\ q. = a^4;$$
$$a c.q. = a^5; \quad a c.c. = a^6; \quad a\ c.q.q. = a^7 \text{ u. s. w.}$$

Die Bezeichnung durch Zahlenexponenten wird häufig Descartes (1596 — 1650) zugeschrieben, so z. B. von Chr. Wolf, der nur nebenbei bemerkt, die Idee dazu rühre von Keppler (1571 — 1631) her, der sie in seiner Harmonica mundi ausgesprochen habe. Die Bezeichnungsweise ist aber älter als diese beiden Mathematiker. Die erste Spur findet sich bei Estienne de la Roche, arismétique et géométrie, Lyon 1520, in den Exponenten 1, 2, 3, also 12^1, 12^2, 12^3. Höhere Exponenten scheint er bei Potenzen nicht gebraucht zu haben, hingegen bezeichnet er die nte Wurzel durch $R)^n$, so groß auch n sein mag (ainsi des aultres racines continuant sans fin), die Quadratwurzel einfacher durch R). Vergl. Nouvelles annales de mathématiques, Tome VI, pag. 35. Bei Michael Stifel (1509 — 1567) kommen schon sowohl positive als negative Exponenten in der noch jetzt gebräuchlichen Bedeutung vor. Gebrochene Exponenten gebrauchte alsdann Simon Stevin 1588 zur Bezeichnung der Wurzelgrößen, indem er den Exponenten in einen Kreis einschloß, z. B. a$\textcircled{\tfrac{m}{n}}$ Die gewöhnliche Wurzelbezeichnung $\sqrt{}$

(entstanden aus r = radix) findet sich auch schon bei Rudolph und Stifel; nur pflegt bei ihnen, wie bei de la Roche, der Exponent zur Rechten gesetzt zu werden, z. B. $\sqrt{\ }^3a$ statt $\sqrt[3]{a}$. Descartes hat also in dieser Beziehung nur das Verdienst, die Bezeichnung zur allgemeineren Anwendung gebracht zu haben.

Die älteren Algebristen nannten die Potenzen Functionen. Seit Johannes Bernoulli, 1690, bezeichnet dieser letztere Name allgemeiner irgend eine Größe, die von einer anderen abhängig ist.

Von den Irrationalzahlen.

§. 133.

Die Radicirung giebt sich auch dadurch als eine inverse Operation zu erkennen, daß sie, wie die beiden früheren (Subtraction und Division) uns zu einer neuen Gattung von Zahlen führt, indem sie nicht allgemein durch die bisher gebrauchten ausführbar ist.

Es sei nämlich z. B. $\sqrt{29}$ zu suchen, so wird dieselbe weder $= 5$ sein, denn $5^2 = 25$, noch $= 6$, denn $6^2 = 26$. Sie wird vielmehr zwischen diesen beiden Zahlen liegen müssen. Und doch können wir beweisen, daß sie nicht in Form eines Bruches existiren kann.

§. 134.

Es läßt sich nämlich allgemein zeigen, daß wenn m irgend eine positive Zahl ist, die mte Potenz eines Bruches wieder ein Bruch sein muß.

Dieser Satz gehört zwar eigentlich in die Zahlentheorie. Da er indessen nicht so von selbst einleuchtet, muß er mit wenig Worten bewiesen werden. Es sei $\frac{a}{b}$ ein ächter oder unächter, aber reducirter Bruch, und auf einen solchen lassen sich nach dem Früheren alle Brüche zurückführen. Diese Bedingung heißt aber mit anderen

Worten: kein Factor von b ist in a enthalten. Wird nun $\frac{a}{b}$ in die mte Potenz erhoben, so entsteht der Ausdruck $\frac{a^m}{b^m}$, der wieder ein reducirter Bruch ist. Denn b ist gegen a^m relative Primzahl, weil a^m keine anderen Primfactoren hat, als die bereits in a enthaltenen, nur in mfacher Anzahl; und da ferner b^m keine anderen Primfactoren hat, als die in b enthaltenen in mfacher Anzahl, so ist auch b^m gegen a^m relative Primzahl, somit $\frac{a^m}{b^m}$ nicht bloß der Form nach ein Bruch.

§. 135.

Wenn nun die mte Potenz eines Bruches nie eine ganze Zahl sein kann, so folgt auch umgekehrt, daß die mte Wurzel einer ganzen Zahl nie ein Bruch sein kann.

Es kann also in dem Beispiele des §. 133 der Ausdruck $\sqrt{29}$ keinen Bruch bedeuten. Andererseits wissen wir aber, daß $5 < \sqrt{29} < 6$.

Das ist nach unseren bisherigen Begriffen ein Widerspruch, zu dessen Lösung eine neue Art von Zahlen erforderlich ist, welche weder ganze Zahlen noch Brüche sind.

§. 136.

Um zu solchen Zahlen zu gelangen, ist wieder ein neuer Begriff in die Arithmetik zu übertragen, der Begriff der Commensurabilität und Incommensurabilität.

Haben wir nämlich irgend zwei Größen, so können wir entweder ein gemeinsames Maß für dieselben angeben oder wir können es nicht. Im ersten Falle nennen wir die Größen unter einander commensurabel, im zweiten incommensurabel. So sind z. B. incommensurabel die Farbe und das Gewicht eines Körpers, seine Festigkeit und Temperatur, wenn auch beide von einander abhängig sein können; überhaupt Größen verschiedener Art. Allein auch Größen gleicher Art, z. B. Linien, können unter einander incommensurabel sein. Denken wir uns (Figur 7) zwei Linien a, b und a von b abgeschnitten, so oft es geht, worauf ein Rest c bleibt. Dann c auf a aufgetragen, bis ein Rest d bleibt u. s. w. So wird

kettenbruchartig dieses Auftragen des Restes auf dem früheren Maße fortgesetzt werden können. Einmal schließlich wird der Rest in dem früheren Maße enthalten sein können und er wird alsdann das gemeinschaftliche Maß der beiden Linien sein. Wir können uns aber auch denken, daß dieses nie eintritt, daß wir vielmehr die genannte Operation ins Unendliche fortsetzen können, und daß alsdann auch kein gemeinschaftliches Maß existirt. Solche Linien lehrt die Geometrie kennen. Zu ihnen gehören beispielsweise die Seite und Diagonale eines Quadrates, der Radius und die Peripherie eines Kreises u. s. w. Es versteht sich von selbst, daß diese Linien dadurch, daß sie kein gemeinschaftliches Maß haben, ihre Qualität als Linien nicht verlieren. Es ist ferner möglich, daß zwei Linien gegen eine dritte incommensurabel, unter sich aber commensurabel sind. So z. B. wenn zwei Kreise gegeben sind, deren Radien respective 1 und 2 Längeneinheiten besitzen, so ist die Peripherie des ersten wie des zweiten Kreises gegen den ersten Radius incommensurabel, die Peripherieen unter sich sind aber commensurabel, die zweite ist genau das Doppelte der ersten.

§. 137.

Mit Hülfe dieses neuen Begriffes können wir nun sagen: solche Wurzelgrößen wie $\sqrt{29}$ sind mit der Einheit incommensurabel, ohne dadurch ihre Eigenschaft als Zahlen zu verlieren. Nur dadurch unterscheiden sie sich von den bisherigen Zahlen, daß in so viele Theile die Einheit auch zerlegt wird, es nicht möglich ist, einen aliquoten Theil derselben zu finden, von welchem jene Wurzelgröße ein Vielfaches wäre. Weil sie auf diese Weise in keinem genau angebbaren Verhältnisse zur Einheit steht, nennt man sie eine Irrationalzahl, im Gegensatz zu den rationalen Zahlen, als welche sämmtliche ganze Zahlen und Brüche bezeichnet werden. Die Irrationalzahlen sind also sämmtlich mit der Einheit incommensurabel, während umgekehrt nicht alle mit der Einheit incommensurable Zahlen Irrationalzahlen zu sein brauchen.

Anmerkung. Die Griechen unterscheiden ἀριθμοι λογοὶ und ἀλογοὶ oder κωφοὶ = surdi. Daher heißen die Irrationalzahlen bei den früheren Mathematikern numeri surdi.

§. 138.

Daß es auch unter den Irrationalzahlen solche giebt, die unter sich commensurabel sind, ist an sich klar.

Z. B. $\sqrt{12}$ und $\sqrt{3}$ sind beide irrational, denn $4 > \sqrt{12} > 3$, $2 > \sqrt{2} > 1$.

Der Quotient derselben $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \frac{12^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{12}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} = 2$ zeigt an, daß die erstere das Doppelte der zweiten ist.

Rationale Zahlen aber können unter einander nie incommensurabel sein; denn da jede derselben ein angebbares gemeinsames Maß mit der Einheit besitzt, so müssen sie auch unter einander ein angebbares Maß besitzen, commensurabel sein. Darin liegt auch der Grund, daß beim Aufsuchen des größten gemeinschaftlichen Divisors zweier ganzer Zahlen schließlich ein solcher, und wäre es auch nur in der Einheit, gefunden werden muß.

§. 139.

Es frägt sich nun, ob und wie mit solchen Irrationalzahlen gerechnet werden kann und darf, wie es im vorigen Paragraphen schon vorläufig angenommen wurde.

Darauf ergiebt sich die Antwort, daß die Gültigkeit solcher Rechnungen darin ihre Begründung hat, daß wir die Irrationalzahlen zwar nicht genau, aber doch näherungsweise angeben können, und daß wir im Stande sind, die Approximation bis zu einem beliebig kleinen Fehler zu treiben. (Vergl. §. 88 und 89 über das Rechnen mit unendlichen Decimalbrüchen.)

Anmerkung. Die bisherigen unendlichen Decimalbrüche unterscheiden sich von den Irrationalzahlen durch den wesentlichen Umstand, daß jene nur der Form nach mit der Einheit incommensurabel sind, diese aber durch den Inhalt.

§. 140.

In der That wissen wir bereits, um bei dem Beispiele $\sqrt{29}$ zu bleiben, daß $5 < \sqrt{29} < 6$. Setzen wir daher näherungsweise $\sqrt{29} = 5$ oder $\sqrt{29} = 6$, so ist der begangene Fehler kleiner als die Einheit. Nun ist, wenn das Quadrat einer da-

zwischen liegenden Bruchzahl gesucht wird, etwa $(5\frac{1}{2})^2 = 30\frac{1}{4}$ noch größer als 29, daher $5 < \sqrt{29} < 5\frac{1}{2}$, und der Fehler, wenn jetzt 5 oder $5\frac{1}{2}$ statt $\sqrt{29}$ gesetzt wird, beträgt sicher weniger als $\frac{1}{2}$. Ferner ist $(5\frac{1}{4})^2 = 27\frac{9}{16}$, also $5\frac{1}{4} < \sqrt{29} < 5\frac{1}{2}$. Aehnlich weiter schließend finden wir

$$5\tfrac{49}{128} < \sqrt{29} < 5\tfrac{25}{64},$$

so daß bei $\sqrt{29} = 5\frac{49}{128}$ oder $= 5\frac{25}{64}$ ein Fehler begangen wird, der $< \frac{1}{128}$ und bei dem ersten Näherungswerthe positiv, bei dem letzteren negativ ist.

Und auf diese Weise können wir dem wahren Werthe so nahe kommen, als wir nur immer wollen.

Von der Wurzelausziehung.

---

§. 141.

Zur Darstellung solcher Näherungswerthe für Irrationalzahlen sind besonders Decimalbrüche sehr geeignet, weil die Rechnungsoperationen mit denselben so viel einfacher sind, als mit irgend anderen Brüchen, welche einen großen Nenner haben, und weil ferner der Umstand, daß man bloß mit Näherungswerthen zu thun hat, dadurch angedeutet werden kann, daß man den berechneten Decimalbruch durch angehängte Punkte nur als Theil eines unendlichen Decimalbruches betrachtet.

§. 142.

Es entsteht daher die Aufgabe: **Näherungswerthe für Irrationalzahlen vermittelst Decimalbrüchen auf möglich bequeme Art zu finden.**

Für die Fälle, daß der Exponent der Wurzel 2 oder 3 ist, also für die Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzeln, sind dazu einfache Methoden angegeben, zu deren Darstellung übergegangen wird, und bei welchen es vorläufig nicht beachtet wird, ob die Wurzel rational oder irrational ist.

§. 143.

Zu diesem Zwecke sind zwei Sätze vorauszuschicken, deren erster von allgemeiner Bedeutung sich auf die Ziffernzahl der nten Wurzel einer mziffrigen decadischen Zahl bezieht. Nennen wir dieselbe vorläufig x, so folgt aus §. 40, daß die nte Potenz dieser Wurzel wenigstens $nx - n + 1$, höchstens nx Ziffern hat, während wir voraussetzungsmäßig wissen, daß diese Ziffernzahl $= m$ ist.

Ist die Ziffernzahl m dem Maximum nx gleich, so wird x aus ihr durch Division durch n gefunden. Ist hingegen m dem Minimum $nx - n + 1$ gleich, so wird x gefunden, indem zu m erst $n - 1$ addirt und dann durch n dividirt wird. Liegt endlich m zwischen nx und $nx - n + 1$, so wird x gefunden, indem vor der Division durch n zu m noch eine Zahl α addirt wird, welche $< n - 1$ ist.

Daraus geht hervor, daß allgemein

$$nx + n > m + n - 1 \geqq nx$$

sein wird; daß man also sagen kann, x sei die ganze Zahl, welche in dem unächten Bruche $\frac{m + n - 1}{n}$ enthalten ist. Dafür schreibt man oft das Zeichen E (entier = ganz), welches vor den in Klammern gesetzten Bruch zu stehen kommt. Also

$$x = E\left(\frac{m + n - 1}{n}\right).$$

Anmerkung. Das Zeichen E (...) rührt von dem schwedischen Mathematiker N. H. Abel (1802—1829) her. Vergl. Crelle, Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. I, S. 18.

Stern bedient sich zu demselben Zwecke des Zeichens $\overline{\frac{m + n - 1}{n}}$. Vergl. Crelle, Journal u. s. w., Bd. XXI.

§. 144.

Ferner bedürfen wir eines Satzes über die Entstehung des Quadrates einer mehrtheiligen Größe. Es ist:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

d. h. das Quadrat der zweitheiligen Größe ist gleich der Summe

der Quadrate der einzelnen Theile, zu welchen noch das doppelte Product jener Theile hinzukommt.

Eine andere weniger gewöhnliche Form, die aber für unseren Zweck passender erscheint, ist die:

$$(a + b)^2 = a^2 + (2a + b)\,b,$$

d. h. das Quadrat der zweitheiligen Größe ist gleich dem Quadrate des ersten Theils und dem Producte des zweiten Theils in den doppelten ersten Theil und in den zweiten Theil. Der erste Theil kann dabei selbst wieder als mehrtheilige Größe erscheinen.

Z. B.: $(a + b + c)^2 = (a + b)^2 + (2[a + b] + c)\,c$

$(a + b + c + d)^2 = (a + b + c)^2 + (2[a + b + c] + d)\,d$ u. s. w.

§. 145.

Nach diesen Vorbereitungen ist es leicht, aus irgend einer decadisch geschriebenen Zahl die Quadratwurzel zu ziehen.

Die Ziffernzahl der Wurzel (§. 143) ist $E\left(\frac{m+1}{2}\right)$. Um dieselbe praktisch zu finden, gebraucht man ein Mittel, welches, wie sich zeigen wird, auch sonst von Bedeutung ist. Bei den Einern anfangend schneiden wir durch Verticalstriche Gruppen von je zwei Ziffern ab, so daß die höchste Gruppe zwei oder eine Ziffer enthält, je nachdem m grade oder ungrade ist. Die Anzahl der Gruppen ist dann offenbar dasselbe, was wir x nannten, somit die Ziffernzahl der Quadratwurzel.

Z. B.: $\sqrt{23\,|\,41\,|\,59\,|\,21}$ ist 4ziffrig,

$\sqrt{9\,|\,86\,|\,10}$ ist 3ziffrig.

§. 146.

Die xziffrige Zahl der Quadratwurzel kann nun als $a \cdot 10^{x-1} + r_1$ gedacht werden, wo a eine einziffrige Zahl, r_1 eine $x - 1$ziffrige bedeutet. Dann ist $(a \cdot 10^{x-1} + r_1)^2 = a^2 \cdot 10^{2x-2} + (2a \cdot 10^{x-1} + r_1)\,r_1$.

Vergleicht man nun den Werth von $x = E\left(\frac{m+1}{2}\right)$, so findet man leicht, daß $a^2 \cdot 10^{2x-2} = a^2\,0000\ldots$ (so viele Nullen, als vor der höchsten Gruppe Ziffern abgeschnitten stehen). Sucht man daher die größte Quadratzahl, welche von jener höchsten Gruppe

abgezogen werden kann, so ist man berechtigt, dieselbe $= a^2$ zu setzen, und kennt somit die höchste Ziffer a der Quadratwurzel.

Z. B.: $\sqrt{23\,41\,59\,21} = 4000 + r_1,$

$\sqrt{9\,86\,10} = 300 + r_1.$

Aber $r_1 = b \,.\, 10^{x-2} + r_2$, wo b eine einziffrige, r_2 eine $x - 2$ziffrige Zahl bedeutet. Folglich ist:

$$(a \,.\, 10^{x-1} + r_1)^2$$

$$= a^2 . 10^{2x-2} + [2a . 10^{x-1} + b . 10^{x-2} + r_2](b . 10^{x-2} + r_2)$$

$$= a^2 . 10^{2x-2} + [2a . 10^{2x-3} + b . 10^{2x-4}]\, b + (2[10a+b]10^{x-2} + r_2) r_2$$

Nachdem also $a^2 . 10^{2x-2}$ von der gegebenen Zahl abgezogen, bleibt ein Rest, welcher zunächst aus $(2a \,.\, 10^{2x-3} + b \,.\, 10^{2x-4})\, b$ besteht. Daher wird b gefunden, wenn wir in jenen Rest mit $2a \,.\, 10^{2x-3}$, d. h. mit $2a00\ldots$ (so viele Nullen als Ziffern vor der zweiten Ziffer der zweiten Gruppe abgeschnitten sind) dividiren und dann zusehen, ob außer dem $2a \,.\, 10^{2x-3} . b$ auch noch $b . 10^{2x-4} . b$ davon abgezogen werden kann.

Daß bei dieser Division b jedesmal als eine einziffrige Zahl erscheinen muß, folgt daraus, daß wenn b z. B. zweiziffrig wäre, dieses anzeigen würde, daß a zu klein genommen war, und voraussetzungsmäßig ist dieses nicht geschehen, sondern a so gewählt, daß $([a + 1] \,.\, 10^{x-1})^2$ größer als die gegebene Zahl ist.

Z. B.: $\sqrt{23 \mid 41 \mid 59 \mid 21} = 4000 + r_1$

$$\begin{array}{rrrrrl}
 & 16 & 00 & 00 & 00 & \\
\hline
 & 7 & 41 & 59 & 21 & : 80000 = 9 = b \\
2a . 10^{2x-3} . b = & 7 & 20 & 00 & 00 & \\
\hline
 & & 21 & 59 & 21 & \\
b^2 . 10^{2x-4} = & & 81 & 00 & 00 & \\
\hline
\end{array}$$

Die Subtraction geht nicht, also war $b = 9$ zu groß angenommen und der Versuch muß mit $b = 8$ gemacht werden. Dann ist

$$\begin{array}{rrrrr}
 & 7 & 41 & 59 & 21 \\
2a . 10^{2x-3} . b = & 6 & 40 & 00 & 00 \\
\hline
 & 1 & 01 & 59 & 21 \\
b^2 . 10^{2x-4} = & & 64 & 00 & 00 \\
\hline
 & & 37 & 59 & 21
\end{array}$$

Die gesuchte Wurzel ist daher $4800 + r_2$ und der Rest $375921 = (2 . 4800 + r_2)\, r_2$, oder da $r_2 = 10\,c + d$ gesetzt werden kann (wollte man die Allgemeinheit der früheren Betrachtung beibehalten, so wäre $r_2 = c . 10^{x-3} + r_3$ zu setzen), so ist $375921 = (96000 + 100\,c)\,c + (9600 + 20\,c + d)\,d$. Demnach kann höchstens $c = 3$ sein, weil der Quotient $\frac{375921}{96000}$ zwischen 3 und 4 liegt. Unter der Voraussetzung $c = 3$ ist aber $(96000 + 100\,c)\,c = 288900$. Dann bleibt noch:

$$\begin{array}{rrr} 37 & 59 & 21 \\ 28 & 89 & 00 \\ \hline 8 & 70 & 21 \end{array}$$

und dieser Rest ist $= (9660 + d)\,d$, indem die ganze Wurzel $= 4830 + d$ ist. Die Division $87021 : 9660$ giebt den Quotienten $d = 9$ und in der That ist:

$$(9660 + 9)\,9 = 87021$$

genau gleich jenem Reste. Es ist daher:

$$\sqrt{23\;41\;59\;21} = 4839.$$

§. 147.

Bei der praktischen Ausführung der im vorigen Paragraphen umständlich entwickelten Methode treten mancherlei Abkürzungen ein. Die hauptsächlichen sind folgende:

1) Die vielen angefügten Nullen werden nicht geschrieben.
2) Von der zu radicirenden Größe wird immer nur eine zweiziffrige Gruppe in Betracht gezogen.
3) Die neuen Stellen, welche als Quotienten auftreten, werden an das Doppelte der vorhergehenden Stellen, die den Divisor bilden, gleich angehängt.

Mit diesen Abkürzungen bietet die Rechnung folgenden Anblick dar:

$$\sqrt{23 \mid 41 \mid 59 \mid 21} = 4(9)839$$

```
 16
 ‾‾
  741
   89
  801
   88
  704
  ‾‾‾
  3759
   963
  2889
  ‾‾‾‾
  87021
   9669
  87021
  ‾‾‾‾‾
```

§. 148.

Das bisher behandelte Beispiel gab eine rationale Wurzel Das andere Beispiel hingegen $\sqrt{98610}$ ist eine Irrationalzahl.

$$\sqrt{9 \mid 86 \mid 10} = 314$$

```
 9
 ‾
 86
 61
 61
 ‾‾
 2510
  624
 2496
 ‾‾‾‾
   14.
```

Es bleibt nach Abzug von 314^2 noch 14 übrig. Will man nun einen Näherungswerth auf z Decimalstellen, so hänge man an die ursprüngliche Zahl 2 z Nullen an, wodurch sie in einen Bruch verwandelt wird, dessen Nenner 10^{2z}. Aus diesem Bruche wird die Quadratwurzel gezogen, indem man sie aus Zähler und Nenner zieht (§. 121). Die Quadratwurzel des Nenners ist 10^z. Wird daher die Quadratwurzel des Zählers nach obiger Methode gesucht, so sind die z letzten Stellen offenbar Decimalstellen, wie verlangt wurde.

Es versteht sich von selbst, daß die 2 z Nullen allmälig zu je zweien angehängt werden können, worauf zwei angehängten Nullen immer eine Decimalstelle der Quadratwurzel entspricht.

§. 149.

Bei welcher der auf die angegebene Art gefundenen Decimalstellen wir stehen bleiben, ist der Fehler immer positiv und kleiner als eine Einheit der letztgenommenen Ordnung. Wird hingegen die letzte Decimalziffer um 1 erhöht, so ist der Fehler negativ, aber auch kleiner als eine Einheit der letztgenommenen Ordnung. Wir können uns auf solche Weise immer zwei Näherungswerthe verschaffen, die beliebig nahe bei einander liegen, während der eine kleiner, der andere größer als die gegebene Irrationalzahl ist.

Z. B.: $\sqrt{98610} = 314,0222$

```
98596
―――――
  1400
  6280
     0
―――――――
  140000
   62802
  125604
――――――――
   1439600
    628042
   1256084
――――――――――
    18351600
     6280442
    12560884
――――――――――
     5790716.
```

Darnach ist $\sqrt{98610} > 314,0222$ und $< 314,0223$.

§. 150.

Ist die gegebene Zahl, aus welcher die Wurzel zu ziehen ist, schon mit einem Decimalbruche versehen, so ist das Verfahren ganz wie früher. Nur werden statt je zwei Nullen zwei von den vorhandenen Decimalstellen herabgezogen, so lange noch welche da sind.

Ist endlich die Quadratwurzel aus einem gewöhnlichen Bruche zu suchen, so würde die Methode, ohne weiteres aus Zähler und Nenner die Wurzel zu ziehen, in den meisten Fällen sehr unvortheilhaft sein, da außer zweimaliger Wurzelausziehung noch Division

mit zwei unendlichen Decimalbrüchen nothwendig werden kann, wenn Zähler und Nenner beide keine genaue Quadrate sind.

Man kann sich alsdann auf verschiedene Weise helfen. Entweder man macht den Bruch rational, d. h. man multiplicirt Zähler und Nenner des Bruches mit dem Nenner, oder allgemeiner gesprochen mit einer solchen Zahl, daß der Nenner des neuen Bruches eine Quadratzahl wird und zieht dann die Wurzel aus dem Zähler, welche noch durch die bekannte Wurzel des Nenners dividirt werden muß. Z. B.:

$$\sqrt{\frac{3}{7}} = \sqrt{\frac{21}{49}} = \frac{1}{7}\sqrt{21} = \frac{1}{7} \cdot 4{,}5825\ldots = 0{,}6546\ldots.$$

Oder was noch häufiger angewandt zu werden pflegt, man verwandelt den gegebenen Bruch in einen Decimalbruch und zieht dann die Wurzel. Z. B.:

$$\sqrt{\frac{3}{7}} = \sqrt{0{,}428571\ldots} = 0{,}6546\ldots.$$

§. 151.

Diese Regeln genügen zwar, um aus allen möglichen gegebenen Zahlen die Quadratwurzeln genau sowohl als annäherungsweise zu ziehen. Allein gerade weil es manchmal nöthig ist, sich mit Näherungswerthen zu begnügen, entsteht die Frage, ob nicht wieder abgekürzte Rechnungsmethoden gefunden werden können, welche den Näherungswerth rascher geben als die gewöhnliche Methode.

Zu einer solchen Methode führt folgende Betrachtung. Es sei die Zahl A gegeben, deren Quadratwurzel gesucht werden soll und es finde sich als erster Theil der Wurzel die Zahl a, während die Summe der übrigen noch unbekannten Stellen wie früher r_1 heißen mag. Dann ist:

$$A = (a + r_1)^2 = a^2 + (2a + r_1)\, r_1$$

und daraus folgt:

$$A - a^2 = (2a + r_1)\, r_1.$$

Wenn nun r_1 gegen $2a$ sehr klein ist, so kann annähernd

$$A - a^2 = 2a\, r_2$$

gesetzt werden, woraus man

$$r_1 = \frac{A - a^2}{2a}$$

erhält. D. h. wenn ein solcher Theil der Quadratwurzel gefunden ist, daß der noch übrige Theil r_1 gegen das Doppelte des bereits gefundenen sehr klein ist (was man daran erkennt, wenn $A - a^2$ sehr klein wird gegen $2a$), so kann man r_1 durch die Division $\frac{A - a^2}{2a}$ nahezu erhalten.

Z. B.: $\sqrt{16 \mid 00 \mid 01 \mid 21} = 4000 + r_1$.

$A - a^2 = 121$ ist sehr klein gegen $2a = 8000$, also nahezu:

$$r_1 = \frac{121}{8000} = 0{,}015 \ldots$$

und demgemäß:

$$\sqrt{16\,00\,01\,21} = 4000{,}015.$$

§. 152.

Als wesentliche Ergänzung dieser Untersuchung muß ein Kriterium gefunden werden, wie weit der so erhaltene Näherungswerth richtig ist.

Erstens ergiebt sich, daß der Näherungswerth

$$\sqrt{A} = a + \frac{A - a^2}{2a}$$

zu groß ist. Denn

$$\left(a + \frac{A - a^2}{2a}\right)^2 = a^2 + 2a\left(\frac{A - a^2}{2a}\right) + \left(\frac{A - a^2}{2a}\right)^2$$

$$\left(a + \frac{A - a^2}{2a}\right)^2 = A + \left(\frac{A - a^2}{2a}\right)^2$$

welches letztere Resultat $> A$ ist.

§. 153.

Es frägt sich zweitens noch, wo diese Ungenauigkeit eintritt. Darauf ergiebt sich eine Antwort, indem man aus der Gleichung

$$A - a^2 = 2a\,r_1 + r_1^2$$

die neue Gleichung

$$\frac{A - a^2}{2a} = r_1 + \frac{r_1^2}{2a}$$

ableitet und untersucht, in welcher Stelle die Zahl $\frac{r_1^2}{2a}$ höchstens

einen Einfluß ausüben kann, welcher bei der abgekürzten Methode vernachlässigt wird und dem r_1 zu Gute kommt.

Nun bestehe a aus n Ziffern, deren höchste von der Ordnung m, die niederste also von der Ordnung $m - n + 1$ ist. Oder mit anderen Worten es ist:

$$10^{m+1} > a \geqq 10^m$$

und ferner

$$10^{m-n+1} > r_1 \geqq 10^{m-n}.$$

Also ist auch:

$$r_1^2 < 10^{2m-2n+2} \text{ und } 2a > 10^m.$$

Nun erhält man jedenfalls eine Zahl, die größer als ein gegebener Bruch ist, wenn man einen größeren Zähler durch einen kleineren Nenner dividirt. Folglich ist:

$$\frac{r_1^2}{2a} < \frac{10^{2m-2n+2}}{10^m}$$

oder es ist:

$$\frac{r_1^2}{2a} < 10^{m-2n+2}.$$

Der Einfluß von $\frac{r_1^2}{2a}$ erscheint also frühestens in der Stelle von der Ordnung $m - 2n + 2$ als eine Einheit, d. h. in der $n - 1$ten Stelle von r_1. Demnach sind $n - 2$ Stellen von r_1, welche durch Division gefunden werden, jedenfalls richtig.

§. 154.

In der $n - 1$ten Ziffer kann der Fehler eintreten, daß dieselbe um eine Einheit zu groß ist. Darüber vergewissert man sich, indem man das Quadrat r_1^2 von $A - a^2 - 2ar_1$ noch abzieht, da diese Subtraction unmöglich wird, falls r_1 zu groß gefunden war. Hierauf kann $a + r_1 = a_1$ gesetzt werden. Es ist:

$$A - a^2 - 2ar_1 - r_1^2 = A - a_1^2$$

und da a_1 eine $n + (m - 1) = 2n - 1$ ziffrige Zahl ist, so können jetzt vermittelst der Division durch $2a_1$ von dem folgenden Theile r_2 wieder $(2n - 1) - 1 = 2n - 2$ Stellen gefunden werden, deren letzte nur durch Subtraction von r_1^2 geprüft werden muß.

Fährt man so beliebig fort, so liefert jede neue Division so viele Ziffern, als schon bekannt sind, weniger einer Ziffer. Die ersten n Stellen von a müssen nach gewöhnlicher Methode gefunden werden. Z. B.:

$\sqrt{9 \mid 86 \mid 10} = 314{,}022229$

```
 9
 86
 61
 61
 2510
  624
 2496
   140 : 628 = 0,02 = r₁
   1400
   1256
    144
      4 = r₁²
    1400 : 62804 = 0,002229 = r₂
    14000
    140000
    125608
     143920
     125608
      183120
      125608
       575120
       565236
         9884
      4968441 = r₂²
      4915559.
```

Bei der jetzt folgenden Division wäre 628044458 der Divisor und es können 8 Decimalstellen gefunden werden.

Anmerkung. Diese abgekürzte Methode finden wir zuerst bei Kiesewetter, „Fortsetzung der Anfangsgründe der reinen Mathematik". (Berlin und Leipzig 1818) §. 76 flg.

§. 155.

Zu einer anderen Abkürzungsmethode, die in manchen Fällen von Nutzen ist, gelangt man durch folgende Betrachtung:

Es seien a, b zwei Zahlen, die in mehr als der Hälfte ihrer Ziffern von der Linken an gerechnet übereinstimmen. Mit anderen Worten: es sei $a > b$ und $a - b$ eine Zahl, die weniger als halb so viele Ziffern als b hat. Dann hat auch das Quadrat $(a-b)^2$ weniger Ziffern als b und es ist demzufolge:

$$(a-b)^2 < b.$$

Ferner ist nach der Voraussetzung:

$$\sqrt{b} < \sqrt{a},$$

also auch

$$2\sqrt{b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$b < \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}\right)^2.$$

Im Zusammenhange mit dem Obigen giebt dieses die Ungleichheit:

$$(a-b)^2 < \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}\right)^2.$$

Daraus folgt nun auch

$$a - b < \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}$$

und da $a - b = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$, wenn die letzte Ungleichheit durch die positive Zahl $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ dividirt wird:

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} < \frac{1}{2}.$$

Daraus folgt endlich durch Quadrirung und Division durch 2:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} < \frac{1}{8}.$$

Der Sinn dieses Ausdruckes ist aber folgender; Wenn die Quadratwurzel aus einem Producte ab, dessen Factoren in mehr als der Hälfte ihrer Ziffern von der Linken an gerechnet übereinstimmen, gezogen werden soll, so kann für dieselbe näherungsweise die halbe Summe jener Factoren $\frac{a+b}{2}$ gesetzt werden und der Fehler beträgt weniger als $\frac{1}{8}$ in der letzten Stelle. Z. B.:

$$\sqrt{1\,51\,69\,59\,32} = \sqrt{12332 \times 12301} = \frac{12332 + 12301}{2} = 12316\tfrac{1}{2}.$$

Nach anderen Methoden findet man diese Quadratwurzel 12316,49 . . .

Anmerkung. Diese Methode hat zuerst Lenthéric angegeben: vergl. Gergonne, annales des mathématiques pures et appliquées, Tome XXI, pag. 83.

§. 156.

Um nun auch die Cubikwurzel aus irgend einer Zahl auszuziehen, genügt ein Satz über die Zusammensetzung des Cubus einer zweitheiligen Größe analog dem §. 144. Diesen Satz finden wir folgendermaßen. Es ist:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

oder

$$(a + b)^3 = a^3 + (3a^2 + 3ab + b^2)\,b.$$

Tritt noch ein dritter Theil c hinzu, so ist:

$$(a + b + c)^3 = (a + b)^3 + (3[a+b]^2 + 3[a+b]\,c + c^2)\,c$$

u. s. w. Das heißt der Cubus einer mehrtheiligen Zahl besteht aus dem Cubus der ersten Theile und einem Producte, dessen einer Factor der letzte Theil ist, während der andere Factor eine Summe ist des dreifachen Quadrates der ersten Theile, des dreifachen Productes jener ersten Theile in den letzten Theil und des Quadrates des letzten Theiles.

§. 157.

Zieht man nun noch in Betracht, daß $E\left(\frac{m+2}{3}\right)$ die Ziffernzahl der Cubikwurzel aus einer m ziffrigen Zahl ist, so ergiebt sich leicht folgende praktische Regel der Cubikwurzelausziehung, deren umständlichere Ableitung nach Analogie des §. 146 auszuführen wäre.

Zuerst zerschneiden wir die zu radicirende Zahl von rechts nach links in 3 ziffrige Gruppen, von denen allemal nur eine Gruppe in Betracht gezogen wird. Dann suchen wir den der höchsten Gruppe zunächst gelegenen Cubus, dessen Cubikwurzel die höchste Ziffer a der gesuchten Zahl sein wird. Um die folgenden Ziffern zu finden, ziehen wir jenen Cubus wirklich ab und nehmen noch die zweite Gruppe herunter, unter welche wir das dreifache Quadrat von a in der Art schreiben, daß dessen Einer unter den Hunderten der dastehenden Zahl sich befinden. In dieser Stellung dividiren wir,

um b zu finden und bilden $3ab + b^2$, deren Einer mit denen des früheren Restes übereinstimmen. Die Summe $3a^2 + 3ab + b^2$ wird mit b vervielfacht, welches $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ giebt, und von jenem Reste abgezogen. Geht diese Subtraction nicht an, so hat man b um die Einheit zu verkleinern. Dann verfährt man ganz analog mit dem jetzt zweiziffrigen Theile a + b der Cubikwurzel wie vorher mit a, um die dritte Ziffer c zu finden u. s. w. Ist die Cubikwurzel eine Irrationalzahl, so findet man den Näherungswerth als Decimalbruch, indem Gruppen von 3 Nullen heruntergenommen werden. Z. B.:

$$\sqrt[3]{24 \mid 101 \mid 235} = 29$$

```
  8
 16101
 12
  54
   81
 1821
 16389
```

Die Subtraction kann nicht ausgeführt werden, also war die Ziffer 9 zu groß und man muß b = 8 setzen.

$$\sqrt[3]{24|101 \mid 235} = 28(9)8,8$$

```
 21 952
  2 149235
  2352
    756
      81
  242841
 2185569
   2352
    672
     64
  241984
 1935872
  213363000
   248832
     6912
       64
  24952384
 199619072
  13743928   u. s. w.
```

§. 158.

Die meiste Mühe bei der Cubikwurzelausziehung machen die Nebenrechnungen, die besonders bei der Darstellung von $3a^2$, $3(a+b)^2$ u. s. w. nöthig sind. Nach einer Bemerkung von Fr. Hofmann (vergl. Grunert, Archiv der Mathematik und Physik, Bd. XXII, S. 240) lassen sich indessen diese Nebenrechnungen sehr vereinfachen.

Denn es sei $a_1 = a + b$, so ist $a_1^3 = a^2 + s\,b$, wo $s = 3a^2 + 3ab + b^2$. Kommt noch der Theil c hinzu und ist $a_2 = a_1 + c$, so ist:

$$a_2^3 = a_1^3 + s_1 \,.\, c, \text{ wo } s_1 = 3a_1^2 + 3a_1 c + c^2$$

und es kommt hauptsächlich darauf an, s_1 darzustellen und dazu zunächst $3a_1^2$. Nun ist:

$$\begin{aligned} 3a_1^2 &= 3a^2 + 6ab + 3b^2 \\ &= (3a^2 + 3ab + b^2) + 3ab + b^2 + b^2 \\ &= 3ab + b^2 + s + b^2. \end{aligned}$$

Daher kann das zur Berechnung der folgenden Theile erforderliche $3a_1^2$ jedesmal durch einfache Addition der vier nachfolgenden Schema schon unter einander stehenden Größen gefunden werden:

	$\sqrt[3]{24 \mid 101 \mid 235} = 288{,}8$		
	8	$3a^2$	$= 12$
	16101	$3ab$	$= 48$
sb	$= 13952$	b^2	$= 64$
	2149235	s	$= 1744$
$s_1 c$	$= 1935872$	b^2	$= 64$
	213363000	$3a_1^2$	$= 2352$
$s_2 d$	$= 199619072$	$3a_1 c$	$= 672$
	13743928	c^2	$= 64$
		s_1	$= 241984$
		c^2	$= 64$
		$3a_2^2$	$= 248832$
		$3a_2 d$	$= 6912$
		d^2	$= 64$
		s_2	$= 24952384$

§. 159.

Auch für die Ausziehung der Cubikwurzeln hat Kiesewetter eine abgekürzte Methode angegeben, die im Principe mit seiner Methode der Quadratwurzelausziehung übereinstimmt (§. 151 flg.). Wenn nämlich

$$A = (a + r_1)^3 = a^3 + (3\,a^2 + 3\,a\,r_1 + r_1^{\,2})\,r_1\,,$$

so setzt man annähernd:

$$A - a^3 = 3\,a^2\,r_1$$

und findet daher durch einfache Division den zu großen Werth

$$r_1 = \frac{A - a^3}{3\,a^2}.$$

Es frägt sich nun, wo der Einfluß der vernachlässigten Glieder sich bemerkbar macht, die leicht in der Gestalt

$$\frac{r_1^{\,2}}{a} + \frac{r_1^{\,3}}{3\,a^2}$$

angegeben werden können. Es sei wieder (vergl. §. 153)

$$10^{m+1} > a \geqq 10^m$$
$$10^{m-n+1} > r_1 \geqq 10^{m-n}.$$

Also ist auch

$$r_1^{\,2} < 10^{2m-2n+2},\quad a \geqq 10^m$$
$$r_1^{\,3} < 10^{3m-3n+3},\quad 3\,a^2 > 10^{2m}.$$

Demnach ist jedenfalls:

$$\frac{r_1^{\,2}}{a} < 10^{m-2n+2},\quad \frac{r_1^{\,3}}{3\,a^2} < 10^{m-3n+3}.$$

Nun ist $n > 1$, der Annahme nach, also jedenfalls:

$$10^{m-2n+2} > 10^{m-3n+3}$$

und zwar so viel größer, daß man behaupten kann, es werde auch sein:

$$\frac{r_1^{\,2}}{a} + \frac{r_1^{\,3}}{3\,a^2} < 10^{m-2n+2}.$$

Der Fehler ist also höchstens eine Einheit in der $n - 1$ten Stelle von r_1, oder auch hier erhält man bei jeder Division so viele Ziffern als schon bekannt sind weniger einer Ziffer.

$$
\begin{array}{l}
\text{z. B.:}\ \sqrt[3]{24101235} = 288{,}8 + r_1 \\
\qquad 24087491{,}072 = a^3 \\
A - a^3 = 13743{,}9280 : 250216{,}32\ (= 3a^2) = 0{,}0549 \\
\qquad 12510\,8160 \\
\qquad\ \ 1233\,11200 \\
\qquad\ \ 1000\,86528 \\
\qquad\quad 232\,246720 \\
\qquad\quad 225\,194688 \\
\qquad\qquad 7{,}052032
\end{array}
$$

Die letzte Stelle 9 ist noch unsicher. Bildet man aber die Correction $3\,a\,r_1{}^2 + r_1{}^3 = 2{,}611492753149$, so findet man, daß dieselbe sich abziehen läßt und es ist daher auf 4 Decimalstellen genau

$$\sqrt[3]{24101235} = 288{,}8549 \ldots.$$

§. 160.

Was das Ausziehen höherer Wurzeln betrifft, so ist dasselbe um so schwieriger, je größer der Wurzelexponent wird. Erleichterungen treten nur dann ein, wenn 2 und 3 die einzigen im Wurzelexponenten enthaltenen Primzahlen sind. Alsdann läßt sich nämlich die einmalige Ausziehung einer hohen Wurzel in mehrmalige Quadrat- und Cubikwurzelausziehung verwandeln.

$$\text{z. B.:}\ \sqrt[6]{A} = \sqrt[3]{\sqrt{A}}$$
$$\sqrt[27]{A} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{A}}}.$$

Uebrigens werden wir später andere Methoden der Wurzelausziehung kennen lernen, welche das directe Verfahren an Kürze übertreffen, und daher das weitere Verweilen bei demselben überflüssig machen.

Von der Potenzirung algebraischer Zahlen.

§. 161.

Bisher haben wir allerdings gelernt, wenigstens mit Hülfe von angenäherten Zahlen den Werth jeder Potenz anzugeben, allein es war doch noch eines, was unserer Betrachtung mangelte. Dieselbe wurde nämlich nur an absoluten Zahlen angestellt, während der Richtungscoefficient, mit welchem dieselben in der Basis behaftet erscheinen können, nicht berücksichtigt wurde. Es bleibt also noch das Potenziren der Richtungscoeffizienten zur näheren Untersuchung.

§. 162.

Ist der Exponent dabei eine ganze Zahl (ob positiv oder negativ ist gleichgültig; denn nach unserer Definition ist die Bedeutung des negativen Exponenten das Umgekehrte der Potenz mit positivem Exponenten, und reciproke Zahlen haben bisher denselben Richtungscoefficienten), so ist zu unterscheiden, ob er grade oder ungrade ist.

Im ersteren Falle wird nämlich, wie aus den Regeln der Multiplication erhellt, die Potenz positiv sein, ob die Basis positiv oder negativ ist. Im zweiten Falle hat die Potenz denselben Richtungscoefficienten wie die Basis.

Wir können daher schreiben:

$$(+)^{2n} = + \quad , \quad (-)^{2n} = +$$
$$(+)^{2n+1} = + \quad , \quad (-)^{2n+1} = -.$$

§. 163.

Aus den zuletzt geschriebenen Gleichungen folgt:

$$(+)^{2n} = (-)^{2n}$$

und darin die Quelle einer Zweideutigkeit, die von der größten Wichtigkeit ist. Haben wir nämlich bei positiver Basis einen gebrochenen Exponenten mit gradem Nenner, so genügt offenbar mehr als eine Zahl der Aufgabe.

Es kann z. B. sein:

$$\sqrt{4} = +2 \text{ und } \sqrt{4} = -2.$$

Es entsteht daher billig die Frage, welcher dieser verschiedenen Werthe zu nehmen ist? Die Antwort darauf ist die, daß eine allgemeine Entscheidung nicht möglich ist. Es kommt auf die specielle Aufgabe an, nach welcher entweder beide Auflösungen, oder nur eine, oder vielleicht auch gar keine eine Bedeutung haben. Mit anderen Worten, aus der Aufgabe selbst und den in ihr enthaltenen Bedingungen muß es sich entscheiden, ob dieselbe mehrere Auflösungen, oder nur eine, oder auch gar keine hat.

§. 164.

Beispiele mögen diesen letzten Satz klar machen.

Befinden wir uns in der Mitte einer 200 metres langen Brücke, und erhalten auf die Frage, wie weit wir zu gehen haben, um ein Ufer zu erreichen, die Antwort:

$$\sqrt{10000} \text{ metres},$$

so sind beide Auflösungen richtig, sowohl

$$+100 \text{ metres als } -100 \text{ metres},$$

weil wir nach beiden Ufern gehen können. Wäre hingegen die Frage nach einem bestimmten Ufer gerichtet, so wäre nur eine Auflösung richtig und zwar + 100 metres oder — 100 metres, je nachdem wir die Richtung nach dem angegebenen Ufer als positive oder negative Richtung bezeichnen wollen.

Eine andere Aufgabe wäre etwa, wenn gefragt würde, wie viele Aepfel in einem Korbe sind, und zur Antwort gegeben würde, daß das Product der um 1 verminderten Anzahl in die um 1 vergrößerte 255 betrage. Wird alsdann die unbekannte Anzahl x genannt, so ist

$$(x-1)(x+1) = x^2 - 1 = 255$$
$$x^2 = 256$$
$$x = \sqrt{256}$$
$$x = +16 \text{ oder } x = -16.$$

Hier hat nur eine Auflösung Bedeutung, und zwar + 16 oder — 16, je nachdem wir das Vorhandensein von Aepfeln als positiv oder negativ bezeichnen wollen.

Wird endlich noch die Anzahl von Personen, die eine Arbeit verrichtet haben, dadurch bestimmt, daß deren Drittel mit ihrer Hälfte multiplicirt 5 giebt, so heißt dieses, wenn x die unbekannte Anzahl bedeutet:

$$\frac{x}{3} \times \frac{x}{2} = \frac{x^2}{6} = 5$$

$$x^2 = 30$$

$$x = \sqrt{30}$$

Hier hat weder die positive noch die negative Wurzel einen Sinn, weil die Anzahl von Personen nicht durch eine Irrationalzahl dargestellt werden kann.

Hat keine Auflösung einen reellen Sinn, so beweist dieses, daß die Aufgabe selbst eine sinnlose war.

§. 165.

An den vorhergehenden einfachen Beispielen wird deutlich, wie es jedesmal einer besonderen Untersuchung bedarf, ob beide Wurzeln oder nur eine und welche der Aufgabe entsprechen.

Die Vernachlässigung dieser Untersuchung führt oft zu unrichtigen Resultaten, besonders wenn die Bedingung, auf die es ankommt, nicht so einfach sich zeigt, wie in den früheren Beispielen.

Hierher gehört folgender Trugschluß. Es sei $a + b = c$. Dann ist

$$a - c = -b$$

$$a = c - b.$$

Folglich durch Multiplication der beiden Gleichungen:

$$a^2 - ac = b^2 - bc.$$

Folglich auch:

$$a^2 - ac + \frac{c^2}{4} = b^2 - bc + \frac{c^2}{4}$$

oder

$$\left(a - \frac{c}{2}\right)^2 = \left(b - \frac{c}{2}\right)^2$$

Wird nun daraus geschlossen

$$a - \frac{c}{2} = b - \frac{c}{2},$$

so folgt endlich

$$a = b.$$

Dieses offenbar im Allgemeinen falsche Resultat ging daraus hervor, daß aus $\left(a - \frac{c}{2}\right)^2 = \left(b - \frac{c}{2}\right)^2$ gefolgert wurde $a - \frac{c}{2} = b - \frac{c}{2}$, welches nicht richtig ist. Denn nehmen wir a und b ungleich an, so ist, weil $a + b = c$, entweder $a < \frac{c}{2}$, $b > \frac{c}{2}$ oder umgekehrt. Jedenfalls haben also $a - \frac{c}{2}$ und $b - \frac{c}{2}$ entgegengesetzte Richtungscoefficienten. Es darf daher nicht gesetzt werden:

$$a - \frac{c}{2} = b - \frac{c}{2},$$

sondern:

$$a - \frac{c}{2} = -\left(b - \frac{c}{2}\right)$$

und daraus folgt das richtige Resultat

$$a + b = c,$$

von welchem ausgegangen worden war.

§. 166.

Da es nun im Allgemeinen nicht möglich ist, vorauszusagen, welche Wurzel genommen werden soll, so mußte man ein Mittel ersinnen, diese Vieldeutigkeit auch anschaulich zu machen. Cauchy gab zu diesem Zwecke folgende Bezeichnung an. Um irgend einen von den Werthen einer Wurzelgröße anzudeuten, schließt er den Ausdruck unter dem Wurzelzeichen in doppelte Klammern ein. Einfache Klammern, oder wo es möglich ist, ohne undeutlich zu werden, gar keine Klammern, bezeichnen dann die positive Wurzel. Also

$$\sqrt{((9))} = \pm 3, \quad \sqrt{(9)} = \sqrt{9} = 3.$$

Derselben Bezeichnung bedienen wir uns auch, wenn andere Wurzeln als Quadratwurzeln vorkommen, um anzugeben, daß irgend ein Werth oder der bestimmte positive Werth der Wurzel gemeint ist. Wir wissen allerdings noch nicht, ob jede andere Wurzel ver-

schiedene Werthe hat, aber grade deßhalb ist es gut, das vieldeutige Zeichen zu benutzen.

Anmerkung. Statt $\sqrt{}((a))$ findet man bei den Franzosen auch oft *W*a. Thibaut (Grundriß der allgemeinen Arithmetik, Göttingen 1830, zweite Ausgabe) schreibt dafür $\overline{\sqrt{}}a$ und allgemeiner $\overline{\sqrt[n]{}}a$.

Von den lateralen Zahlen.

---

§. 167.

Gehen wir in der Untersuchung der Potenzen der Richtungscoefficienten weiter, so gelangen wir wieder zu einem Punkte, wo unsere bisherigen Begriffe nicht ausreichen, und wo es daher, ähnlich wie in den früheren analogen Fällen, nothwendig wird, eine neue Eigenschaft der Zahlen anzunehmen, vermittelst welcher die Aufgabe gelöst werden kann.

Die Schwierigkeit tritt ein, wenn eine negative Basis auf eine Potenz mit gebrochenem Exponenten von gradem Nenner erhoben werden soll, wenn also die Zahl

$$\sqrt[2n]{-a}$$

oder im einfachsten Falle (bei $n = 1$)

$$\sqrt{-a}$$

gesucht wird. Diese Wurzelgröße kann nämlich weder positiv sein (etwa $+b$) noch negativ (etwa $-b$), weil sowohl $(+b)^2 = +b^2$ als $(-b)^2 = +b^2$, während $(\sqrt{-a})^2 = -a$ sein muß. Deßhalb wurden solche Wurzelgrößen von den früheren Mathematikern als unmögliche Zahlen, als imaginäre Zahlen bezeichnet.

§. 168.

Die Betrachtung, vermittelst derer wir vielmehr die reelle Existenz jener Zahlen begründen wollen, beruht darauf, daß es in der

Natur nicht bloß contradictorische Gegensätze giebt, sondern conträre Gegensätze; daß wir also durch Uebertragung dieses Gedankens in die Arithmetik berechtigt sind, Zahlen nicht bloß in einer positiven und in einer ihr grade entgegengesetzten negativen Richtung anzunehmen, sondern auch in irgend anderen seitlichen Richtungen. Wir gelangen durch diese Erweiterung von der Zahlenlinie zu der Zahlenebene.

§. 169.

Ist nun $\sqrt{-1}$ zu suchen, so wird diese Zahl durch die Proportion

$$1 : \sqrt{-1} = \sqrt{-1} : -1$$

definirt. D. h. $\sqrt{-1}$ ist eine Zahl, welche ebenso aus der positiven Einheit entsteht, wie aus ihr die negative Einheit. Oder $\sqrt{-1}$ ist eine Zahl, deren Bildungsweise aus der positiven Einheit in der Mitte der Bildungsweise der negativen Einheit aus der positiven liegt. Untersuchen wir aber diese letztere Bildungsweise, so zeigt sich, daß die negative Einheit aus der positiven entstehen kann, indem diese um den Nullpunkt in drehende Bewegung versetzt eine halbe Umdrehung vollendet. Und zwar kann diese Umdrehung (Figur 8) in dem Sinne a b c oder in dem Sinne $\alpha\,\beta\,\gamma$ erfolgen. Die Hälfte dieser halben Umdrehung, oder eine viertel Umdrehung wird daher erforderlich sein, um zu der Richtung zu gelangen, in welcher $\sqrt{-1}$ zu nehmen ist. Da aber diese Viertelumdrehung auch wieder in dem Sinne a b c und in dem Sinne $\alpha\,\beta\,\gamma$ beschrieben werden kann, so finden sich sogar zwei Richtungen 0 b und $0\,\beta$, in welchen $\sqrt{-1}$ gedacht werden kann, und welche einander grade entgegengesetzt sind, auf der ursprünglich positiven Richtung aber senkrecht stehen.

§. 170.

Um diese verschiedenen Richtungen zu unterscheiden, nennen wir von nun an die ursprüngliche positive und negative Richtung zusammen directe Richtungen, die neuen auf den directen senkrechten Richtungen aber laterale Richtungen, und zwar die von

dem Nullpunkte aufwärts die pluslaterale Richtung, die von dem Nullpunkte abwärts die minuslaterale Richtung.

Als Zeichen der pluslateralen Richtung gebrauchen wir einen Pfeil mit der Spitze nach oben $\uparrow$, als Zeichen der minuslateralen Richtung einen Pfeil mit der Spitze nach unten $\downarrow$ (vergl. §. 25).

Um auch die beiden Umdrehungen im Sinne a b c und $\alpha\beta\gamma$ zu unterscheiden, nennen wir die erstere eine Rechtsumdrehung, die letztere eine Linksumdrehung.

§. 171.

Nach dem Vorhergehenden ist also $\sqrt{-1}$ entweder in pluslateraler oder in minuslateraler Richtung zu nehmen; die absolute Größe dieser Wurzel ist offenbar 1; oder es ist unter Anwendung der doppelten Klammern:

$$\sqrt{((-1))} = \uparrow 1 \text{ oder } = \downarrow 1$$

und allgemeiner:

$$\sqrt{((-a^2))} = \uparrow a \text{ oder } = \downarrow a,$$

was auch durch die Verbindung beider Zeichen

$$\sqrt{((-a^2))} = \begin{smallmatrix}\uparrow\\\downarrow\end{smallmatrix} a$$

geschrieben werden kann. Die einfache Klammer soll hier die pluslaterale Wurzel bedeuten:

$$\sqrt{(-a^2)} = \sqrt{-a^2} = \uparrow a.$$

§. 172.

Mit diesen lateralen Zahlen haben wir nun zu rechnen.

Was die Addition betrifft, so können wir dieselbe zwischen lateralen und directen Zahlen nur formell andeuten, da Schritte in einer Richtung und in einer zu derselben senkrechten Richtung sich gegenseitig nicht verändern können, sondern neben einander existiren. Bei der Addition lateraler Zahlen unter sich hingegen tritt dasselbe Verfahren ein, wie bei der Addition von directen Zahlen unter sich; nämlich die pluslateralen und minuslateralen Zahlen heben einander auf.

Die Summe einer lateralen und einer directen Zahl heißt eine complexe Zahl.

§. 173.

Wenn die complexen Zahlen sich in der Rechnung auch nicht in einfachere Gestalt umformen lassen, so können wir sie doch in der Zeichnung uns versinnlichen.

Die Summe a $\uparrow$ b führt durch a Schritte in positiv directer Richtung und dann b Schritte in pluslateraler Richtung nach dem Punkte A der Zahlenebene (Figur 9). Ebendahin führt aber die Linie oA, so daß

$$a \uparrow b = oA$$

zu setzen ist, wo aber oA zu gleicher Zeit eine Zahl und einen Richtungscoefficienten bezeichnet. Ist andererseits c $\uparrow$ d gegeben, welches nach dem Punkte B führt, so daß

$$c \uparrow d = oB,$$

so wird endlich die Summe oA + oB, d. h. die Summe zweier complexer Zahlen gefunden, indem von A aus eine Anzahl Schritte in solcher Richtung gegangen wird, wie oB es vorschreibt. Man erhält so:

$$oA + oB = oC.$$

Anmerkung. Man vergleiche das Princip der relativen Bewegung und den daraus folgenden Satz des Kräfteparallelograms in der Mechanik.

§. 174.

Ein wichtiger hier einzuschaltender Satz heißt: Wenn zwei complexe Zahlen einander gleich sind, so findet auch Gleichheit statt zwischen den directen Theilen einzeln genommen und zwischen den lateralen Theilen einzeln genommen. Ist

$$a \uparrow \alpha = b \uparrow \beta,$$

so muß auch sein:

$$a = b, \uparrow \alpha = \uparrow b.$$

Denn aus der gegebenen Gleichung folgt, indem beidemal am Anfange — b, am Ende $\downarrow \alpha$ hinzugefügt wird:

$$-b + a \uparrow \alpha \downarrow \alpha = -b + b \uparrow \beta \downarrow \alpha.$$

Auf der linken Seite heben sich nun die unmittelbar auf einander folgenden $\uparrow \alpha \downarrow \alpha$ Schritte, und ähnlich auf der rechten Seite — b + b. Es bleibt

$$-b + a = \uparrow \beta \downarrow \alpha,$$

d. h. a — b Schritte in positiv directer Richtung bringen nach demselben Punkte wie $\beta - \alpha$ Schritte in pluslateraler Richtung. Dieses ist aber nur unter der einen Bedingung möglich, daß man beidemal im Nullpunkte selbst bleibt, daß also $a - b = 0$ und $\beta - \alpha = 0$. Daraus folgt aber

$$a = b, \uparrow \alpha = \uparrow \beta,$$

was bewiesen werden sollte.

Anmerkung. Auf diesen Satz gründet es sich, daß auch bei complexen Zahlen die Reihenfolge der Theile gleichgültig ist.

§. 175.

Gehen wir zu der Multiplication über, so ist es klar, daß die absoluten Zahlen wie früher multiplicirt werden und nur die Multiplication der Vorzeichen neue Betrachtungen erfordert.

Untersuchen wir beispielsweise das Product $- \times \uparrow$, so entsteht minus aus der positiv directen Richtung durch eine halbe Rechtsumdrehung; folglich ist jetzt von der pluslateralen Richtung aus eine halbe Rechtsumdrehung zu machen, welche zur minuslateralen Richtung führt. Es ist also $- \times \uparrow = \downarrow$.

Wäre $\downarrow \times \uparrow$ zu suchen, so entsteht $\downarrow$ aus $+$ durch eine viertel Linksumdrehung; folglich ist jetzt von $\uparrow$ aus eine viertel Linksumdrehung zu machen, welche nach $+$ führt. Also ist $\downarrow \times \uparrow = +$.

Durch solche Betrachtungen finden sich folgende Resultate:

$+ . + = +$	$\uparrow . + = \uparrow$	$- . + = -$	$\downarrow . + = \downarrow$
$+ . \uparrow = \uparrow$	$\uparrow . \uparrow = -$	$- . \uparrow = \downarrow$	$\downarrow . \uparrow = +$
$+ . - = -$	$\uparrow . - = \downarrow$	$- . - = +$	$\downarrow . - = \uparrow$
$+ . \downarrow = \downarrow$	$\uparrow . \downarrow = +$	$- . \downarrow = \uparrow$	$\downarrow . \downarrow = -$

Anmerkung. In diesen Sätzen liegt der Beweis der Vertauschbarkeit der Factoren bei lateralen Zahlen.

§. 176.

Für die Division bedarf es keiner frischen Regeln, da dieselben aus dem vorhergehenden Paragraphen unmittelbar einleuchten. Es ist zu bemerken, daß das Reciproke einer lateralen Zahl auch das entgegengesetzte Zeichen erhält.

Einige Beispiele von Divisionen sind:

$$\frac{\sqrt{-4}\,.\,2}{-\sqrt{-9}} = \frac{\uparrow 2\,.\,2}{\downarrow 3} = \frac{\uparrow 4}{\downarrow 3} = -\frac{4}{3}$$

$$\frac{\sqrt{-16}\,.\,\sqrt{-4}}{-8} = \frac{\uparrow 4\,.\,\uparrow 2}{-8} = \frac{-8}{-8} = 1$$

$$\frac{-\sqrt{-8}\,.\,\sqrt{-2}\,.\,\sqrt{2}}{\sqrt{-32}\,.\,-4} = \frac{\downarrow\sqrt{8}\,.\,\uparrow\sqrt{2}\,.\,\sqrt{2}}{\uparrow\sqrt{32}\,.\,-4} = \frac{\sqrt{32}}{\downarrow 4\,.\,\sqrt{32}} = \uparrow\frac{1}{4}$$

§. 177.

Vor der näheren Betrachtung der Potenzirung lateraler Zahlen wird es gut sein, auf eine andere Untersuchung einzugehen, welche §. 173 angebahnt wurde.

Dort sahen wir nämlich, daß außer den directen und den zu denselben senkrechten lateralen Richtungen noch unzählige andere Richtungen in der Zahlenebene existiren, welche sämmtlich in dem Nullpunkte, als Mittelpunkt eines ganzen Strahlenbündels (Fig. 10) ihren Anfang haben, so daß auf jedem Strahl Längen abgemessen werden können, die absolut betrachtet einander gleich, der Richtung (also dem Vorzeichen) nach von einander verschieden sind.

Eine wichtige Frage ist es nun, ob wir genöthigt sein werden, für alle diese unendlich viele verschiedenen Richtungen auch unendlich viele Zeichen einzuführen; indem diese Nothwendigkeit, wenn sie existirte, unsere Betrachtungsweise statt zu einer einfachen zu einer so complicirten machen würde, daß sie wieder aufgegeben werden müßte, um eine andere Betrachtungsweise aufzusuchen, welche, gleichfalls zur Versinnlichung der sogenannten imaginären Zahlen tauglich, keine so nachtheilige Consequenzen in sich trüge. Dieses Aufgeben der seitherigen Betrachtungsweise würde jedoch alsdann keinenfalls in die Realität der gewonnenen Resultate eingreifen, sondern nur das Unzulängliche des Bildes der Zahlenebene beweisen.

§. 178.

Eine solche Nothwendigkeit existirt indessen nicht. Wir können das Bild der Zahlenebene festhalten und doch keine neuen Vorzeichen weiter gebrauchen.

Da es nämlich nur darauf ankommt, die Richtung einer Linie von bekanntem Anfangspunkte (dem Nullpunkte) anzugeben, so wird dieses erreicht, wenn noch ein zweiter Punkt der Linie bekannt ist; zu diesem zweiten Punkte wählen wir den, der vom Nullpunkte um die Längeneinheit entfernt ist. Wir sagen nämlich, die Zahl oA (Figur 11) ist der Größe und Richtung nach bekannt, wenn ihre absolute Größe ϱ und die Lage des Punktes M gegeben ist, der von 0 um die Längeneinheit entfernt ist. Deßhalb nennen wir die Lage (0M) den Richtungscoefficienten von 0A und schreiben:

$$0A = (0M)\,\varrho$$

Es kommt noch darauf an, statt des unbestimmten Richtungscoefficienten (0M) einen anderen zu substituiren. Dieses geschieht dadurch, daß wir einen anderen Weg angeben, durch welchen gleichfalls der Punkt M von 0 aus erreicht wird, nämlich den Weg 0P ↑ PM, welcher nach dem früheren für 0M gesetzt werden kann. Es ist also jetzt:

$$0A = (0P \uparrow PM)\,\varrho,$$

wo 0P sowohl als PM positive oder negative Zahlen bedeuten, die indessen in einem eigenthümlichen Zusammenhange stehen.

§. 179.

Zunächst ist klar, daß die Linien 0P, PM Functionen der Drehung + 1M sind, d. h. daß wenn eine andere Drehung + 1M′ nach der Richtung 0M′ führt, andere Linien 0P′, P′M′ entstehen. Wir wollen, um diese Abhängigkeit anzudeuten, die Senkrecht PM den Sinus, das horizontale Stück 0P den Cosinus jener Umdrehung nennen, und indem wir die Umdrehung durch die Größe des Winkels $M0+1 = \alpha$, $M'0+1 = \beta$ bezeichnen, schreiben wir:

$$PM = \sin\alpha,\quad 0P = \cos\alpha$$

$$P'M' = \sin\beta,\quad 0P' = \cos\beta.$$

Demnach wäre:

$$0A = (\cos\alpha \uparrow \sin\alpha)\,\varrho.$$

Wir können uns nun eine Lage 0M″ denken, welche durch eine Linksumdrehung β entsteht, während wir nach 0M′ durch eine eben so große Rechtsumdrehung gelangten. Da aber durch β die Rechtsumdrehung bezeichnet wurde, werden wir die dem Sinne nach ent-

gegengesetzte Linksumdrehung durch $-\beta$ zu bezeichnen haben und es wird sein:

$$0M'' = \cos(-\beta) \uparrow \sin(-\beta).$$

Außerdem ergiebt der Anblick der Figur, daß

$$0M = \cos\beta \downarrow \sin\beta.$$

§. 180.

Diese Bemerkungen ergeben mehrere Resultate. **Erstens** finden wir aus

$$\cos(-\beta) \uparrow \sin(-\beta) = \cos\beta \downarrow \sin\beta$$

vermittelst des Satzes des §. 174, daß

$$\cos(-\beta) = \cos\beta \text{ und } \sin(-\beta) = \sin\beta.$$

Zweitens können wir die Richtungen $0M'$, $0M''$ multipliciren und zwar nach zwei verschiedenen Methoden. Einmal sagen wir:

$$0M' \times 0M'' = (\cos\beta \uparrow \sin\beta) \,.\, (\cos\beta \downarrow \sin\beta)$$
$$= \cos\beta^2 \downarrow \cos\beta \,.\, \sin\beta \uparrow \sin\beta \,.\, \cos\beta + \sin\beta^2.$$
$$= \cos\beta^2 + \sin\beta^2.$$

Das andere Mal sagen wir: $0M'$ ist aus der Richtung $0 + 1$ durch eine Rechtsumdrehung β entstanden, folglich ist jetzt von $0M''$ gleichfalls eine Rechtsumdrehung β zu beschreiben, welche nach $0 + 1$, d. h. in die positive directe Lage führt. Es ist demnach auch

$$0M' \times 0M'' = +1.$$

Also ist:

$$\cos\beta^2 + \sin\beta^2 = 1.$$

Durch diesen wichtigen Satz ist der Zusammenhang der Functionen Sinus Cosinus gegeben.

§. 181.

So wie wir eben zwei Zahlen multiplicirten, deren Lage gegen die positive directe Richtung symmetrisch war, so können wir auch zwei beliebige Zahlen mit einander multipliciren und das Product auf verschiedene Weise ausdrücken, wodurch wir wieder neue merkwürdige Resultate erhalten. Die zwei zu multiplicirenden Zahlen seien nämlich

$$0M = \cos\alpha \uparrow \sin\alpha$$
$$0M' = \cos\beta \uparrow \sin\beta.$$

Das Product ist daher:

$$0M'' = 0M \times 0M'$$

$$= \cos\alpha \,.\, \cos\beta \uparrow \cos\alpha \,.\, \sin\beta \uparrow \sin\alpha \,.\, \cos\beta - \sin a \,.\, \sin\beta$$

$$= (\cos\alpha \,.\, \cos\beta - \sin\alpha \,.\, \sin\beta) \uparrow (\sin\alpha \,.\, \cos\beta + \cos\alpha \,.\, \sin\beta).$$

Andererseits entsteht das Product (Figur 12), indem von $0M'$ aus eine Rechtsumdrehung α vorgenommen wird, oder da $0M'$ selbst durch eine Rechtsumdrehung β aus $0+1$ entsteht, indem von $0+1$ aus eine Rechtsumdrehung $\alpha+\beta$ vorgenommen wird. Dieses giebt aber:

$$0M'' = \cos(\alpha+\beta) \uparrow \sin(\alpha+\beta).$$

In der Verbindung der beiden Werthe von $0M''$ liegen die Sätze:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \,.\, \cos\beta - \sin\alpha \,.\, \sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \,.\, \cos\beta + \cos\alpha \,.\, \sin\beta.$$

Außerdem ergiebt die zweite Art der Multiplication den Satz:

$$(\cos\alpha \uparrow \sin\alpha) \,.\, (\cos\beta \uparrow \sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) \uparrow \sin(\alpha+\beta).$$

§. 182.

Von vielen interessanten Sätzen, die daraus sich ableiten lassen, mögen nur folgende angeführt werden:

Es sei $\beta = \alpha$, so ist:

$$\cos 2\alpha = \cos\alpha^2 - \sin\alpha^2$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \,.\, \cos\alpha.$$

Da ferner $1 = \cos\alpha^2 + \sin\alpha^2$, so ist auch

$$1 + \cos 2\alpha = 2 \cos\alpha^2$$

und daraus

$$\cos\alpha = \sqrt{\left(\left(\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right)\right)}.$$

Ebenso ist

$$1 - \cos 2\alpha = 2 \sin\alpha^2$$

und daraus

$$\sin\alpha = \sqrt{\left(\left(\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\right)\right)}.$$

Welches Vorzeichen bei diesen zweideutigen Quadratwurzeln zu wählen ist, hängt von der Größe der Drehung α ab, aus welcher jedesmal zu entnehmen ist, ob der Cosinus und Sinus eine positive oder eine negative Zahl ist.

§. 183.

Kommt zu den Factoren $(\cos\alpha \uparrow \sin\alpha) \,.\, (\cos\beta \uparrow \sin\beta)$ noch ein dritter Factor $(\cos\gamma \uparrow \sin\gamma)$ hinzu, so ist augenblicklich

$$(\cos\alpha \uparrow \sin\alpha) \,.\, (\cos\beta \uparrow \sin\beta) \,.\, (\cos\gamma \uparrow \sin\gamma)$$
$$= \cos(\alpha + \beta + \gamma) \uparrow \sin(\alpha + \beta + \gamma)$$

und auf diese Weise wird die Multiplication fortgesetzt, so viele Factoren auch hinzutreten. Sind daher n solcher Factoren gegeben und dieselben alle unter einander gleich, so wird die Multiplication zu einer Potenzirung und es ist:

$$(\cos\alpha \uparrow \sin\alpha)^n = \cos n a \uparrow \sin n\alpha.$$

Dieser wichtige Satz wurde zuerst von Moivre entdeckt und findet sich in dessen Miscellanea analytica, London 1730. Nach ihm wird der Satz das Moivre'sche Theorem genannt.

Wird $n\alpha = \beta$, $\alpha = \frac{\beta}{n}$ gesetzt, so folgt auch:

$$\left(\cos\frac{\beta}{n} \uparrow \sin\frac{\beta}{n}\right)^n = \cos\beta \uparrow \sin\beta,$$

also:

$$\sqrt[n]{((\cos\beta \uparrow \sin\beta))} = \cos\frac{\beta}{n} \uparrow \sin\frac{\beta}{n}.$$

Somit ist durch das Moivre'sche Theorem auch die Aufgabe des Potenzirens complexer Zahlen gelöst.

§. 184.

Hier läßt sich auch nachweisen, daß der Gebrauch doppelter Klammern bei anderen Wurzeln als der Quadratwurzel gleichfalls nothwendig ist, indem jede nte Wurzel n von einander verschiedene Werthe hat.

Es sei nämlich (Figur 13) die nte Wurzel aus 0M zu ziehen, so heißt das, es soll eine Rechtsumdrehung x gefunden werden, welche nmal wiederholt aus der positiv directen Lage in die Lage 0M bringt. Diese Drehung kann erhalten werden, wenn die Drehung + 1M in n gleiche Theile getheilt wird, so daß die erste Theilungslinie

$$0M' = \sqrt[n]{((0M))}.$$

Die Lage 0 M kann aber auch erreicht werden, indem eine ganze Umdrehung und noch die Drehung + 1 M vollzogen wird, oder eine Umdrehung:

$$2\pi + (+ 1 M),$$

indem die ganze Umdrehung aus geometrischen hier nicht zu erörternden Gründen durch 2π bezeichnet wird. Dann ist $\frac{2\pi + (+1M)}{n}$ auch eine nte Wurzel von 0 M oder:

$$0 M'' = \sqrt[n]{((0 M))}.$$

Ebenso kann 0 M durch zwei ganze Umdrehungen und der Drehung + 1 M erhalten werden, wodurch

$$0 M''' = \sqrt[n]{((0 M))}$$

gefunden wird.

So giebt es als letzte Entstehungsweise von 0 M noch:

$$(n - 1) . 2\pi + (+ 1 M),$$

welche auch eine Wurzel

$$0 M^{(m)} = \sqrt[n]{((0 M))}$$

liefert.

Jede andere Entstehungsweise von 0 M liefert aber eine schon vorhandene Wurzel, wie die Betrachtung der Figur unmittelbar zeigt. Demnach giebt es genau n und nicht mehr noch weniger verschiedene Werthe der nten Wurzel irgend einer complexen Zahl.

§. 185.

Eine bisher nicht berücksichtigte Frage ist die, ob es möglich ist, den Zahlenwerth des Cosinus und Sinus, die zu irgend einer Drehung gehören, zu finden. Für einige besondere Drehungen leuchtet dieses ein. Offenbar ist nämlich:

$$\cos 0 = 1 \quad , \quad \sin 0 = 0$$

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0 \quad , \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\cos \pi = - 1 \quad , \quad \sin \pi = 0$$

$$\cos \frac{3\pi}{2} = 0 \quad , \quad \sin \frac{3\pi}{2} = -1.$$

Aus diesen bekannten Werthen können vermittelst der Formeln des §. 182 nun immer die Functionen der um die Hälfte kleineren

Drehungen gefunden werden, und aus diesen durch Multiplication (§. 181) die Functionen von aus diesen zusammengesetzten Drehungen. Näherungsweise ist man daher wirklich im Stande, zu jeder beliebigen Drehung jene Functionen zu finden.

Vermittelst der eben angegebenen Methode hat schon Ptolemäus (im zweiten Jahrhundert unserer Zeitrechnung) Tabellen für das Doppelte des Sinus berechnet unter dem Namen μεγάλη σύνταξις (gewöhnlich Almagest genannt durch Verbindung des arabischen Artikels al mit μέγιστον). Die Anwendung des Sinus selbst findet sich zuerst bei Mohamed-al-Batani (gewöhnlicher Albatenius genannt, † 929), der Name bei Plato Tiburtinus, dem ersten Uebersetzer der scientia stellarum des Albatenius. Der Name Cosinus rührt von dem Engländer Gunter, im Anfange des 17. Jahrhunderts, her.

Anmerkung. Weitere historische Bemerkungen, welche als zu tief in die Geometrie eingreifend hier nicht am Platze wären, vergl. J. H. T. Müller, Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie, Halle 1852, S. 348.

§. 186.

Der erste Mathematiker, welcher die wirkliche Existenz der sogenannten imaginären Zahlen mit freilich unhaltbaren Gründen vertheidigte, war Heinrich Kühn, Professor zu Danzig, † 1769. Sein Aufsatz Meditationes de quantitatibus imaginariis construendis et radicibus imaginariis exhibendis findet sich schon im Vol. III, Novi Commentarii Academiae Petropolitanae pro anno 1750.

Richtigere Ansichten finden sich schon bei Buée, Mémoire sur les quantités imaginaires in den Philosophical Transactions for 1806. Ihm folgt mit den unserigen ähnlichen Ansichten Française, Nouveaux principes de géométrie de position in Gergonne annales etc. Tome IV, pag. 61 (année 1813). Er bedient sich der Zeichen:

$$1_0 = + \;,\; 1_\pi = - \;,\; 1_{\frac{\pi}{2}} = \uparrow \;,\; 1_{-\frac{\pi}{2}} = \downarrow .$$

In demselben Bande pag. 133 beansprucht Argand, Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires

dans les constructions géométriques, die Priorität dieser Ansichten unter Berufung auf eine Schrift desselben Titels wie der Aufsatz, welche Paris 1806 erschien.

Nach 15jähriger Vernachlässigung erschienen gleichzeitig über unseren Gegenstand Mourey, La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires, Paris 1828, und Warren, A treatise on the geometrical representation of the square roots ot negative quantities, Cambridge 1828, sowie zwei Aufsätze desselben Verfassers in den Philosophical Transactions for 1829.

Zu allgemeinerer Geltung gelangten aber diese Ansichten erst in den letzten Jahren, trotzdem daß selbst Carl Friedrich Gauß in den Göttinger gelehrten Anzeigen vom Jahre 1831, S. 625, schon die ganze Theorie auf wenig Seiten andeutete. Er gebrauchte auch zuerst den Namen lateraler Zahlen.

Die neuesten ausführlicheren Monographien sind:

Faure, Interprétation géométrique des quantités imaginaires, Paris 1845.

Scheffler, Ueber das Verhältniß der Arithmetik zur Geometrie, 1846, und Der Situationscalcül, 1851.

Matzka, Die Realität der vorgeblich imaginairen Größen, Prag 1850.

Letzterem Werke haben wir auch das Zeichen des Pfeiles für die lateralen Zahlen entnommen.

Von den Logarithmen.

§. 187.

Den vorigen Gegenstand verlassend, dessen weitere Ausführung der Analysis anheimfällt, gehen wir zu einer neuen Gedankenreihe über.

Wie das Addiren als seinen Gegensatz das Subtrahiren, das Multipliciren als seinen Gegensatz das Dividiren ergab, so fanden wir als Gegensatz des Potenzirens im engeren Sinne das Radiciren. Allein hier zeigt sich die wesentliche Verschiedenheit von den früheren Operationen, daß noch eine zweite Operation existirt, die einen Gegensatz zu dem Potenziren bildet. Der Grund davon liegt darin, daß bei der Addition die Theile, bei der Multiplication die Factoren vertauscht werden dürfen, bei der Potenz hingegen eine Vertauschbarkeit der Basis und des Exponenten nicht existirt, daß also eine andere Operation nöthig ist, um aus Potenz und Exponenten die Basis, oder aus Potenz und Basis den Exponenten zu finden.

§. 188.

Die erstere Aufgabe bildete das Radiciren. Bei der zweiten, mit deren Lösung wir uns jetzt beschäftigen wollen, treten neue Bezeichnungen ein, die zuerst anzugeben sind.

Die potenzirte Zahl a führt noch immer den Namen der Basis; $a^m = b$ nennen wir aber nicht mehr die Potenz, sondern den Logarithmand und dem Exponenten m geben wir den Namen Logarithmus.

Wenn also $a^m = b$, so sagen wir: m sei der Logarithmus, von b für die Basis a und schreiben dafür:

$$m = \overset{a}{\log}\, b.$$

Anmerkung 1. Der Name Logarithme ist aus λογοῦ ἄριθμος zusammengesetzt, bedeutet daher so viel als Beziehungszahl.

Anmerkung 2. Crelle, der die so sehr praktische Bezeichnung, wo die Basis über die Sylbe log geschrieben wird, in seiner „Sammlung mathematischer Aufsätze", Berlin 1821, Bd. I, S. 207, zuerst vorschlug, schreibt dafür in dem „Versuch einer allgemeinen Theorie der analytischen Facultäten", Berlin 1823,

$$m = {}^{a}b.$$

Baltzer hat

$$m = {}^{a}\log b = a \text{ Logarithmus von } b$$

angegeben, was Schloemilch adoptirte (vergl. Grunert, Archiv u. s. w., Band XVIII, S. 407).

§. 189.

Um zu jeder gegebenen Zahl für jede gegebene Basis den Logarithmen zu finden, hat man Tabellen berechnet, welche den Namen der Logarithmentafeln führen. Hier wird also einmal die Möglichkeit einer solchen Berechnung nachzuweisen sein, und ferner noch, daß es genügt, wenn eine Logarithmentafel für eine bestimmte Basis berechnet ist.

§. 190.

Um den letzteren Nachweis zuerst zu führen, sei eine Logarithmentafel für die Basis a gegeben und man suche $\overset{b}{\log}\, c$.

Es sei etwa:

$$x = \overset{b}{\log}\, c \text{ oder } b^x = c.$$

Ferner sei:

$$m = \overset{a}{\log}\, b \text{ oder } a^m = b$$

$$n = \overset{a}{\log}\, c \text{ oder } a^n = c.$$

Daraus folgt:

$$b^x = (a^m)^x = a^{mx} \text{ und } c = a^n;$$

also weil $b^x = c$:

$$a^{mx} = a^n.$$

Damit diese beiden Potenzen derselben Basis gleich seien, müssen die Exponenten identisch sein. Es muß sein:

$$mx = n.$$

Daraus folgt aber:

$$x = \frac{n}{m}$$

oder durch Einsetzung der verschiedenen Werthe von x, n, m:

$$\overset{b}{\log}\, c = \frac{\overset{a}{\log}\, c}{\overset{a}{\log}\, b},$$

d. h. durch Division zweier Logarithmen, welche aus der gegebenen Tabelle bekannt sind, wird der gesuchte Logarithmus gefunden.

§. 191.

Nachdem so gezeigt worden, daß die Berechnung der Logarithmen für eine Basis genügt, wird die nächste Frage sein, welche Zahl wir alsdann als jene Basis zu wählen haben, wobei erstens die Wahl des Vorzeichens, zweitens die Wahl der absoluten Größe der Basis zu berücksichtigen ist.

Der Gedanke, eine negative Basis zu wählen, wird bei folgender Betrachtung sehr bald aufgegeben werden. Wenn wir nämlich eine negative Basis — a wählen, so werden bei stetiger Aufeinanderfolge der Logarithmen die zugehörigen Zahlen unstetig durcheinander gewürfelt erscheinen. Es wird z. B. zum Logarithmen 0 die Zahl + 1 gehören, zum Logarithmen $\frac{1}{2}$ die Zahl $\uparrow\sqrt{a}$, zum Logarithmen 1 die Zahl — a und ein ähnlicher Wechsel von positiven, negativen, lateralen Zahlen wird auch in noch kleineren Zwischenräumen stattfinden.

Eine solche Unstetigkeit eignet sich aber nicht für eine Tabelle, die zum Nachschlagen bestimmt ist, in der man sich also mit möglich geringster Mühe zurechtfinden soll. Ganz aus demselben Grunde werden wir noch weniger eine laterale Basis wählen und beantworten deßhalb unsere erste Vorfrage dahin, daß wir jedenfalls eine positive Zahl zur Basis nehmen, weil bei ihr zu sämmtlichen directen Logarithmen positive Logarithmanden gehören.

§. 192.

Untersuchen wir weiter, welche positive Zahl als Basis genommen werden soll, so bleibt offenbar eine Zahl von der Wahl aus-

geschlossen, nämlich die Zahl 1; weil jede bestimmte Potenz von 1 wieder 1 ist, und daher alle endlichen Logarithmen Logarithmen von 1 wären, die Logarithmen von allen anderen Zahlen aber nicht bestimmt angegeben werden könnten. (Die Logarithmen der Zahlen über 1 wären ∞, die der Zahlen unter 1 wären $-\infty$.)

Wir werden daher nur eine Zahl wählen dürfen, die < 1 oder > 1.

§. 193.

Auch auf Ersteres hat man verzichtet und hauptsächlich aus folgendem Grunde. Wenn die Basis < 1, also ein ächter Bruch etwa $\frac{k}{1}$, wo $k < 1$, so muß jede positive Potenz derselben wieder ein ächter Bruch sein; nur negative Logarithmen entsprechen alsdann Zahlen, welche > 1 sind.

Es wird in diesem Systeme also dem größeren Logarithmus die kleinere Zahl entsprechen und umgekehrt, was in der Tabelle das Nachschlagen einigermaßen erschweren würde. Ferner kommen überdieß Zahlen, welche > 1 sind, im Allgemeinen doch häufiger vor als ächte Brüche, und so würde man meistens mit negativen Zahlen zu thun haben. Das ist aber gegen die Gewohnheit des Rechnens, welche, wie früher bemerkt wurde (§. 25), in der Regel das häufiger Vorkommende als positive Richtung setzt.

Damit nun dem entsprechend sowohl Logarithmus und Logarithmand zugleich zu- und abnehmen, als auch die Logarithmen der Zahlen, welche > 1 sind, positiv ausfallen, ist man daher genöthigt, zur Basis eine Zahl zu wählen, welche > 1 ist.

So ist die Wahl immer mehr eine beschränkte, und andere Rücksichten der Zweckmäßigkeit, auf welche wir gleich kommen werden, veranlaßten die Wahl einer bestimmten Zahl als Basis, nämlich der Zahl 10.

§. 194.

Es bleibt also nur noch zu zeigen, welchen besonderen Nutzen die Wahl der Zahl 10 als Basis gewährt, und dann ob und wie es überhaupt möglich ist, eine Logarithmentafel für diese Basis zu berechnen. Der große Vortheil, welchen die Basis 10 ergiebt, besteht darin, daß für jede Zahl augenblicklich zwei Grenzen ange-

geben werden können, zwischen denen der Logarithmus liegt. Ist nämlich die Zahl b, deren Logarithmus gesucht wird, m ziffrig, so ist jedenfalls b $\geqq 10^{m-1}$ und b $< 10^m$, also auch

$$m - 1 \leqq \log b < m,$$

indem wir von jetzt an die Logarithmen für die Basis 10 nur durch log bezeichnen, ohne die Basis besonders anzudeuten.

Der Logarithme jeder solchen Zahl b besteht daher im Allgemeinen aus zwei Theilen, deren einer eine ganze Zahl m — 1 ist (man findet sie, indem man die Ziffernzahl m von b um die Einheit verkleinert), während der andere eine Zahl ist, die < 1, ob mit der Einheit commensurabel oder incommensurabel, wissen wir noch nicht. Jener erste Theil heißt die Charakteristik, Kennziffer des Logarithmen, der zweite Theil die Mantisse.

§. 195.

Es lassen sich nun weit engere Grenzen finden, innerhalb welcher log b enthalten sein muß. Die Quadratwurzel des Productes aus 10^{m-1} in 10^m liefert nämlich $\sqrt{(10^{m-1} \times 10^m)} = 10^{m-1+0,5}$, d. h. eine Zahl deren Logarithmus m — 1 + 0,5 in der Mitte zwischen m — 1 und m liegt. Je nachdem diese Zahl größer oder kleiner als b, erhält man jetzt die Grenze:

$$m - 1 < \log b < m - 1 + 0{,}5$$

oder:

$$m - 1 + 0{,}5 < \log b < m.$$

Dann werden die beiden Grenzen von b wieder multiplicirt, also $10^{m-1} \times 10^{m-1+0,5}$ (oder $10^{m-1+0,5} \times 10^m$) und aus dem Producte die Quadratwurzel $10^{m-1+0,25}$ (oder $10^{m-1+0,75}$) gezogen, um wieder engere Grenzen zu finden u. s. w.

Auf diese Weise wird b zwischen immer engere Grenzen 10^α und 10^β gebracht und zugleich log b zwischen die Grenzen α, β. Wird deren Unterschied endlich verschwindend klein, so ist log b auch von jeder derselben nur um eine verschwindend kleine Zahl verschieden, d. h. jede jener beiden Grenzen ist ein Näherungswerth, der für log b gesetzt werden kann.

§. 196.

Es möge etwa nach der angegebenen Methode log 3472 gesucht werden. Die ersten Grenzen sind 10^3 und 10^4. Also:

$$3 < \log 3472 < 4.$$

$\sqrt{10^7} = 10^{3,5} = 3162{,}2775025\ldots < 3472$. Die nächstfolgenden Grenzen sind demnach:

$$3{,}5 < \log 3472 < 4.$$

$\sqrt{10^{7,5}} = 10^{3,75} = 5623{,}413113 > 3472$. Daher ist:

$$3{,}5 < \log 3472 < 3{,}75.$$

$\sqrt{10^{7,25}} = 10^{3,625} = 4216{,}9648 > 3472$. Also:

$$3{,}5 < \log 3472 < 3{,}625.$$

Weiter fortfahrend finden wir noch folgende Grenzen:

$$3{,}54092053175 > \log 3472 > 3{,}5404421875.$$

Also mit Genauigkeit:

$$\log 3472 = 3{,}540\ldots$$

§. 197.

Nach dieser Methode können nun offenbar Logarithmentafeln berechnet werden, wenn sie auch in Wirklichkeit nicht so berechnet worden sind, sondern mit Hülfe unendlicher Reihen, wie es in der Analysis gelehrt wird.

Nur eine Bemerkung ist noch nothwendig. Wenn b irgend eine rationale positive Zahl, so finden wir auf obige Weise log b in Gestalt eines Approximationswerthes durch einen unendlichen Decimalbruch dargestellt und können billig die Frage erheben, ob log b nicht auch in geschlossener Form dargestellt werden kann, mit andern Worten, ob die Mantisse des log b wirklich mit der Einheit incommensurabel ist.

Dieses ist aber in der That der Fall, so oft b nicht eine Potenz mit ganzem Exponenten von 10 ist, d. h. so oft b nicht die Gestalt einer 1 mit Nullen hat.

Denn gesetzt es wäre $\log b = \frac{p}{q}$, wo $\frac{p}{q}$ ein reducirter Bruch ist, so heißt das:

$$10^{\frac{p}{q}} = b,$$

oder:

$$b = \sqrt[q]{100\ldots}\ (\text{p Nullen}).$$

Nun ist $\sqrt[q]{100\ldots}$ (p Nullen) entweder eine 1 mit $\frac{p}{q}$ Nullen und $\frac{p}{q}$ eine ganze Zahl, was der Voraussetzung widerspricht, oder eine incommensurable Zahl, was der Voraussetzung, daß b rational sei, widerspricht. Mithin ist die Voraussetzung falsch, daß

$$\log b = \frac{p}{q}$$

sein könne.

Die Logarithmentafeln sind also alle nur approximativ berechnet; aber die Annäherung kann so weit gebracht werden, als man nur will, und deßhalb gilt für die Rechnung mit Logarithmen dasselbe, was früher für die Rechnung mit Näherungswerthen überhaupt bewiesen wurde (§. 88 flg.).

§. 198.

Die erste Berechnung logarithmischer Tafeln wurde von Neper (auch Napier und Nepair geschrieben), Baron von Merchiston (1550 — 1617) ausgeführt. Seine Tafeln erschienen unter dem Titel: Mirifici logarithmorum canonis descriptio, Edinborough 1614, 4°. Die Basis seiner Logarithmen ist 9999999,00000005. Fast gleichzeitig damit, und gleichfalls als Resultat selbstständiger, nach Einigen sogar früherer Entdeckung erschienen: „Jobst Byrgs Arithmetische und geometrische Progreßtabuln, sambt gründlichen Unterricht, wie solche nützlich in allerlei Rechnungen zu gebrauchen und verstanden werden soll; gedruckt in der alten Stadt Prag 1620.“ Von der Neper'schen Arbeit abhängig waren hingegen die Logarithmentafeln, welche Benjamin Ursinus 1624 und Johannes Keppler 1628 herausgaben.

Schon 1618 war in England die Logarithmorum Chilias prima auf 8 Decimalstellen berechnet von Henry Briggs, Professor der Geometrie am Gresham College in London, herausgegeben

worden, bei welchen zum ersten Male die Zahl 10 zur Basis genommen war. Daher führen die Logarithmen für diese Basis den Namen briggische Logarithmen. Briggs, geboren 1556, starb 1630 als Professor zu Oxford.

Von Logarithmenberechnungen, die sich auf eine große Zahl Decimalstellen ausdehnen, sind besonders zwei zu nennen. Abraham Sharp (1651 — 1742) berechnete die Logarithmen aller Primzahlen bis 1100 auf 60 Decimalstellen. Um dieselbe Zeit berechnete Wolfram, ein holländischer Artillerieoffizier, die Logarithmen der Primzahlen unter 10000 bis auf 48 Decimalstellen. Näheres darüber findet sich im 4. Bande von Lambert's deutschem gelehrten Briefwechsel.

Die großartigste Logarithmenberechnung ist die im Anfange der französischen Republik unter Prony's Leitung von 60—80 Rechnern ausgeführte. Der schon angefangene Druck der Tafeln wurde durch die Entwerthung der Assignaten unterbrochen. Die Tafeln würden außer einer ausführlichen Einleitung 1200 Folioseiten eingenommen haben. Vergl. Notice sur les grandes tables logarithmiques et trigonométriques calculées au bureau de cadastre à Paris, an. IX.

Schriften über Logarithmen hat Francis Maseres gesammelt: Scriptores logarithmici, London 1791 — 96.

In neuerer Zeit sind die Tafeln meistens stereotypirt worden. Die besten Logarithmentafeln sind von Callet, Vega, Köhler.

§. 199.

Was die Einrichtung der Logarithmentafeln betrifft, so ist Folgendes zu bemerken. Da die Charakteristik der briggischen Logarithmen sich (§. 194) so leicht ergiebt, so findet sich in den Tafeln jedesmal nur die Mantisse angegeben und auch diese nur für Zahlen über 10000, da die Logarithmen von Zahlen, welche vermittelst Multiplication oder Division durch Potenzen mit ganzen Exponenten von 10 aus einander gebildet werden, gleiche Mantissen haben.

Es wäre indessen immer noch weitläufig, jede Zahl hinzuschreiben und neben dieselbe ihren Logarithmen, zumal da bei großen nur wenig verschiedenen Zahlen auch die Logarithmen nur sehr wenig

verschieden sind, und die Zunahme derselben der Zunahme der entsprechenden Zahlen sehr annähernd gleichförmig ist. Diese beiden Eigenschaften, welche in der Analysis näher begründet hier bloß angeführt werden können, dienen zur bequemeren Einrichtung der Logarithmentafeln, wie sie zuerst von Nathaniel Roe, Pastor in der Grafschaft Suffolk, bei der Herausgabe seiner Two tables of logarithmes, London 1633, 8° angedeutet, dann von John Newton in seiner Trigonometria Britannica, London 1685, verbessert wurde.

Darnach finden sich in 10 auf einander folgenden Columnen die Logarithmen von eben so viel auf einander folgenden Zahlen, und zwar in der ersten Columne sämmtliche Decimalstellen der Mantisse, in den folgenden nur die 4 letzten Stellen; endlich ist noch eine Columne von Proportionaltheilen zur Darstellung der Logarithmen von mehr als 5ziffrigen Zahlen vorhanden.

Aufmerksamkeit erfordert es nur, wenn in einer der Columnen über der Anfangsziffer ein — (bei Köhler) oder * (bei Vega) sich befindet, oder diese Ziffer um den Raum einer Zeile heruntergerückt erscheint (bei Callet). Dieses bedeutet, daß als Anfang der Mantisse die drei ersten Mantissenziffern der folgenden Zeile zu nehmen sind.

Beim Rückwärtsaufsuchen der Zahl zu einem gegebenen Logarithmen hat man ganz nach denselben Principien zu verfahren. Ist z. B. $\log b = m$, so schreibt man:

$$N. \log. m = b$$

und spricht es aus: numerus logarithmi m gleich b.

§. 200.

Als Beispiel suchen wir log 1648457. Die Charakteristik ist 6. Um die Mantisse zu finden, wird berücksichtigt, daß aus den Tafeln nur log 1648400 und log 1648500 gefunden werden kann. Es ist nämlich:

$$\log 1648400 = 6{,}2170626$$
$$\log 1648500 = 6{,}2170890.$$

Während die Zahl um 100 zunimmt, nimmt der Logarithmus um 0,0000264 zu. Ist also die Veränderung von Zahl und Lo-

garithmus nahezu gleichförmig, so muß bei Veränderung der Zahl um 57 der Logarithmus sich nahezu um

$$\frac{57}{100} \times 0{,}0000264 = 0{,}0000150$$

verändern. Es ist demnach:

$$\log 1648457 = 6{,}2170626 + 0{,}0000150 = 6{,}2170776.$$

Beim Gebrauch der Proportionaltheile, wie sie in der letzten Columne angegeben sind, erhält die Operation folgende Gestalt:

log 1648457 = 6,2170626
132 (wegen 5)
185 (wegen 7)
6,2170776

Wird andererseits N. log. 6,3012567 gesucht, so finden wir in den Tafeln nur:

N. log. 6,3012471 = 2001000
N. log. 6,3012688 = 2001100.

Während der Logarithmus um 0,0000217 zunimmt, nimmt die Zahl um 100 zu. Eine Veränderung des Logarithmen von 0,0000096 wird also nahezu mit einer Veränderung der Zahl um

$$\frac{0{,}0000096}{0{,}0000217} \times 100 = 44{,}24$$

übereinstimmen. Es ist demnach:

N. log. 6,3012567 = 2001000 + 44,24 = 2001044,24.

Der Gebrauch der Proportionaltheile giebt hier etwas weniger genau

N. log. 6,3012567 = 2001044,1 . . .
2471
96
87 (bei 4)
90
87 (bei 4)
30
22 (bei 1).

§. 201.

Bisher betrachteten wir die Logarithmen solcher Zahlen, die größer als 1 waren. Aechte Brüche werden negative Logarithmen

haben, deren Darstellung auf verschiedene Weise möglich ist. Man kann, um dieselben zu erhalten, von der Divisionsregel der Potenzen ausgehen, indem die ganze Rechnung mit Logarithmen ja Nichts anderes als Rechnung mit Potenzen ist.

So wird der Logarithmus eines Productes gefunden, indem man die Logarithmen der Factoren addirt; der Logarithmus eines Quotienten, indem der Logarithmus des Divisors von dem des Dividenden abgezogen wird; der Logarithmus einer Potenz, indem der Logarithmus der Basis mit dem Exponenten multiplicirt wird.

Ist nun der Bruch $\frac{p}{q}$ gegeben, so ist:

$$\log \frac{p}{q} = \log p - \log q$$

negativ, wenn $p < q$, z. B.:

$$\log \frac{2}{3} = \log 2 - \log 3 = 0{,}3010300 - 0{,}4771213 = -0{,}1760913.$$

Soll mit den Logarithmen weiter gerechnet werden, wie es in der Regel geschieht, weil dadurch alle Operationen in einfachere umgewandelt werden, so bedient man sich statt der negativen Bruchform lieber des decadischen Complements, wonach also:

$$\log \frac{2}{3} = 1 - 0{,}1760913 - 1 = 0{,}8239087 - 1.$$

Diese Form kann man auch unmittelbar erhalten, wenn man den Bruch in einen Decimalbruch verwandelt. Also:

$$\log \frac{2}{3} = \log \frac{66667}{100000} = 4{,}8239044 - 5 = 0{,}8239044 - 1.$$

In den letzten Decimalstellen tritt dabei, wie in unserem Beispiele, häufig eine Unsicherheit ein. Indessen genügt bei den meisten Rechnungen der Gebrauch 5stelliger Logarithmen, so daß man die beiden letzten Stellen doch vernachlässigen kann.

§. 202.

An der Auflösung größerer Rechnungen vermittelst Logarithmen ist oftmals der Umstand hinderlich, daß Summen oder Differenzen vorkommen, und es uns bisher noch nicht möglich ist, aus den

Logarithmen zweier Zahlen die Logarithmen ihrer Summe oder Differenz zu finden.

Zu diesem Zwecke hat Gauß eine Tabelle berechnet, die unter dem Namen der Gauß'schen Logarithmen bekannt ist und deren Wesen in Folgendem besteht.

Es sind 3 Columnen A, B, C, deren erste A von 0 bis 2 durch alle Tausendtheile, von da bis 3,4 durch alle Hunderttheile, von da bis 5 durch alle Zehntheile zu gehen pflegt. Die entsprechenden Zahlen der Columnen B, C sind dann so berechnet, daß wenn

$$A = \log m$$

ist,

$$B = \log\left(1 + \frac{1}{m}\right), \quad C = \log(1 + m).$$

§. 203.

Ist nun $\log(a + b)$ aus $\log a$ und $\log b$ zu suchen und $\log a > \log b$, so mache man:

$$m = \frac{a}{b},$$

d. h. suche die Differenz $\log a - \log b$ in der Columne A auf. Alsdann ist $B = \log\left(1 + \frac{b}{a}\right) = \log(a+b) - \log a$ und somit:

$$\log(a + b) = \log a + B.$$

Ferner ist aber auch $C = \log\left(1 + \frac{a}{b}\right) = \log(a+b) - \log b$, also nicht minder:

$$\log(a + b) = \log b + C.$$

So sei z. B. $\log a = 3{,}56229$, $\log b = 3{,}55993$, dann ist:

$$A = 0{,}00236$$

und die entsprechenden Zahlen der beiden anderen Columnen:

$$B = 0{,}29971, \quad C = 0{,}30269;$$

also:

$$\log(a + b) = 3{,}56229 + 0{,}29971 = 3{,}86200$$

oder:

$$\log(a + b) = 3{,}55993 + 0{,}30269 = 3{,}86262,$$

wo die 3 ersten Decimalstellen übereinstimmen.

Es ist aber in unserem Beispiele $a = 3650$, $b = 3630{,}2$, $a + b = 7280{,}2$ und

$$\log(a + b) = 3{,}86214.$$

§. 204.

Ist $\log(a - b)$ aus $\log a$ und $\log b$ zu suchen, so ist zu unterscheiden, wie groß die Differenz $\log a - \log b$.

Ist $\log a - \log b > 0{,}30103$, so sucht man diese Differenz in der Columne C und setzt dadurch:

$$1 + m = \frac{a}{b}.$$

Dann ist $A = \log\left(\frac{a}{b} - 1\right) = \log(a - b) - \log b$ und somit

$$\log(a - b) = \log b + A.$$

Oder auch $B = \log\left(1 + \frac{1}{m}\right) = \log\left(1 + \frac{1}{\frac{a}{b} - 1}\right)$ $= \log a - \log(a - b)$ und somit:

$$\log(a - b) = \log a - B.$$

So sei $\log a = 2{,}54341$, $\log b = 2{,}21200$, dann ist:

$$C = 0{,}33141$$

und die entsprechenden Zahlen der beiden anderen Columnen:

$$A = 0{,}05875,\quad B = 0{,}27264;$$

also:

$$\log(a - b) = 2{,}21200 + 0{,}05875 = 2{,}27075$$

oder:

$$\log(a - b) = 2{,}54341 - 0{,}27264 = 2{,}27077,$$

noch übereinstimmend in der vierten Decimalstelle.

Genau ist: $a = 349{,}47$, $b = 162{,}93$, $a - b = 186{,}54$,

$$\log(a - b) = 2{,}27077.$$

§. 205.

Ist hingegen $\log a - \log b < 0{,}30103$, so sucht man diese Differenz in B, d. h. setzt:

$$1 + \frac{1}{m} = \frac{a}{b}.$$

Dann ist $A = \log\left(\frac{1}{\frac{a}{b} - 1}\right) = \log b - \log(a - b)$

und somit

$$\log(a - b) = \log b - A$$

oder auch $C = \log\left(1 + \frac{1}{\frac{a}{b} - 1}\right) = \log a - \log(a - b)$

und somit:

$$\log(a - b) = \log a - C.$$

So sei $\log a = 3{,}71919$, $\log b = 3{,}60194$; dann ist:

$$B = 0{,}11725$$

und die entsprechenden Zahlen der beiden anderen Columnen:

$$A = 0{,}50873, \quad C = 0{,}62599;$$

also:

$$\log(a - b) = 3{,}60194 - 0{,}50873 = 3{,}09321$$

oder:

$$\log(a - b) = 3{,}71919 - 0{,}62599 = 3{,}09320$$

mit Uebereinstimmung in vier Decimalstellen.

Genau ist: $a = 5238{,}3$, $b = 3998{,}9$, $a - b = 1239{,}4$,

$$\log(a - b) = 3{,}09321.$$

§. 206.

Bei jeder der drei Aufgaben giebt es nach dem Vorhergehenden zwei Auflösungsarten; man thut aber wohl, sich an eine bestimmte zu gewöhnen, um sich den Gebrauch der Tafel desto leichter mechanisch zu machen.

Daß die Tafel nicht weiter geht, als bis $A = 5$, hat darin seinen Grund, daß für diese und größere Zahlen die zweite Columne B in fünf Decimalen verschwindet und die Zahlen der dritten Columne C denen der ersten gleich werden. Ist also

$$\log a - \log b > 5,$$

so kann ohne Fehler in den fünf ersten Decimalstellen sowohl

$$\log(a + b) = \log a$$

als auch

$$\log(a - b) = \log a$$

gesetzt werden.

§. 207.

Eine Frage, die hier noch ungelöst bleibt, ist die nach dem Logarithmus negativer und lateraler Zahlen, sowie nach dem Logarithmanden lateraler Logarithmen. Diese beiden Gegenstände, welche allein noch übrig sind, bleiben für's Erste noch dem Gebiete der Analysis einverleibt, indem sie nicht elementar genug behandelt werden können, um schon hier ihre Stelle zu finden. Diese Lücke der Elementararithmetik auszufüllen scheint trotz mannigfachen Versuchen noch nicht gelungen zu sein.

Außerdem ist mit der Betrachtung der Logarithmen die eigentliche Elementararithmetik abgeschlossen. Es giebt indessen noch einige Gegenstände, die im Vortrage mit ihr verbunden zu werden pflegen. Dahin gehören besonders:

1. Die Anfangsgründe der Algebra.
2. Die Lehre von den Proportionen und Progressionen.
3. Die Syntaktik.

Anfangsgründe der Algebra.

§. 208.

Wenn auch bisher schon Gleichungen in Rede kamen, d. h. das Verhältniß zweier Ausdrücke, die als Repräsentanten eines und desselben Werthes erscheinen, und in Betreff derselben die Aufgabe sich darbot, eine oder die andere der vorkommenden Größen als unbekannt zu betrachten, und aus dem gegebenen Zusammenhange mit anderen bekannten Größen ihren Werth zu suchen, so stellte sich diese Aufgabe doch immer nur in einzelnen Fällen und kam nur mittelbar in Betracht. Statt dessen können wir jetzt diese Aufgabe selbst als unmittelbares Object von Untersuchungen bezeichnen und gewinnen dadurch einen speciellen Theil der Mathematik, der unter dem Namen der Algebra oder der Theorie der Gleichungen bekannt ist.

Anmerkung. Die Algebra war schon im 9. Jahrhundert bekannt. Der Name kann daher nicht von Geber abstammen, der um 1050 zu Cordova lehrte. Der Name findet sich zuerst bei Mohamed-ben-Moussa († 812 am Hofe Harun-al-Raschid's) in seiner Algebr v'Almukabala, welches Lucas Pacciolo durch restauratio et oppositio übersetzt; also algebra = Herstellung.

§. 209.

Die Algebra besteht demnach in der Darstellung der Methoden, vermittelst derer aus gegebenen Gleichungen eine oder die andere Größe entwickelt wird, die als unbekannt angesehen wurde.

Ein Werth der Unbekannten, welcher einer Gleichung genügt, wird eine Wurzel derselben genannt.

Die Aufstellung der Gleichung, oder der Ansatz, gehört nicht in die Algebra, noch lassen sich über denselben allgemeine Vorschriften geben. Nur so viel mag darüber bemerkt werden: Man nimmt die unbekannte Größe vorläufig als bekannt an, zwar nicht in Zahlenwerthen, aber durch einen der letzten Buchstaben des Alphabets, und rechnet dann mit diesem Buchstabenwerthe, bis ein bestimmter Zusammenhang zwischen demselben und bekannten Größen gefunden wird, welcher alsdann den Ansatz der Gleichung bildet.

§. 210.

Die Gleichungen werden zunächst in algebraische und transcendente Gleichungen unterschieden. Unter ersteren versteht man solche, in welchen nur Potenzen der Unbekannten mit rationalen directen Exponenten vorkommen. Transcendent heißt eine Gleichung, in der auch andere Functionen der Unbekannten vorkommen. Z. B.:

$$x^{\sqrt{3}},\ x^{\uparrow a},\ a^{x},\ \log x,\ \cos x.$$

Mit solchen werden wir uns hier nicht beschäftigen.

§. 211.

Die algebraischen Gleichungen werden nach zwei Principien eingetheilt. Einmal nach dem Grade, wobei man unter Grad der Gleichung den Exponenten der höchsten Potenz der Unbekannten versteht, nachdem alle negativen und gebrochenen Exponenten derselben durch besondere Umformungen weggeschafft sind; und zweitens nach der Anzahl der Unbekannten.

Anmerkung. Das Wegschaffen gebrochener Exponenten nennt man Rationalmachen der Gleichung. Es erfolgt in der Regel durch wiederholtes Potenziren der Gleichung. Eine directe Methode von Scheffler vergl. in Grunert's Archiv u. s. w. Bd. XIII, S. 389.

§. 212.

Was den Grad der Gleichungen betrifft, so sollen hier nur die Gleichungen vom ersten und zweiten Grade behandelt werden und keine Gleichungen von höheren Graden, welche allgemein als höhere Gleichungen bezeichnet werden sollen. Setzen wir

ferner zur Bedingung, daß vorläufig nur eine Unbekannte vorkommen soll, so wenden wir uns zur Auflösung der Gleichungen vom ersten Grade mit einer Unbekannten.

Dieselbe beruht auf zwei Axiomen, die schon häufig angewendet wurden, daß nämlich Gleiches zu Gleichem addirt Gleiches giebt und ebenso Gleiches mit Gleichem multiplicirt (wo natürlich Addition und Multiplication in der erweiterten Bedeutung gemeint sind, wo sie die Subtraction und Division einbegreifen).

§. 213.

Aus dem ersten dieser Axiome folgt zunächst ein Satz, der natürlich auf alle Gleichungen sich bezieht und sich so aussprechen läßt: In einer beliebigen Gleichung kann man jedes Glied mit dem entgegengesetzten Vorzeichen auf die andere Seite des Gleichheitszeichens setzen, wodurch man immer wieder eine richtige Gleichung erhält.

Denn es sei die Gleichung

$$(a) \pm g = (b)$$

gegeben, wo (a) das Aggregat aller Glieder auf der linken Seite des Gleichheitszeichens mit Ausnahme des Gliedes $\pm$ g bedeutet, (b) das Aggregat aller Glieder auf der rechten Seite. Addirt man nun

$$\mp g = \mp g,$$

so erhält man

$$(a) \pm g \mp g = (b) \mp g$$

oder

$$(a) = (b) \mp g.$$

Dasselbe Resultat erhält man aber durch Anwendung obiger Regel, wodurch dieselbe in völliger Allgemeinheit bewiesen erscheint.

§. 214.

Nun ergiebt sich leicht folgende Regel zur Auflösung der Gleichung vom ersten Grade: Man stelle deren Glieder nach §. 213 so um, daß auf der einen Seite des Gleichheitszeichens bloß bekannte, auf der anderen Seite bloß unbekannte Glieder vorkommen, fasse die hierauf sich auf jeder Seite befindenden Glieder als algebraische Summe

in ein Glied zusammen und dividire dann die Gleichung durch den Coefficienten der unbekannten Größe. Z. B.:

$$ax - b - cx = -dx + e - f$$

$$ax - cx + dx = b + e - f$$

$$(a - c + d)x = (b + e - f)$$

$$x = \frac{b + e - f}{a - c + d}.$$

§. 215.

Der nächste Schritt führt uns zur Auflösung der Gleichungen des zweiten Grades mit einer Unbekannten. Die allgemeinste Form, in der dieselbe auftritt, ist

$$Ax^2 + Bx + C = 0,$$

wenn man sich alle Glieder, welche x^2 enthalten, in eines vereinigt denkt; ebenso alle Glieder, welche x enthalten; und endlich alle Glieder, welche kein x enthalten. Es bezeichnen also A, B, C beliebige Aggregate.

Die Auflösung dieser sogenannten quadratischen Gleichung kann auf zwei wesentlich von einander verschiedenen Wegen erreicht werden, zu deren Erklärung aber noch eine Unterscheidung der höheren Gleichungen in reine und unreine erforderlich ist.

§. 216.

Unter einer reinen Gleichung (aequatio pura) versteht man eine solche, in welcher nur eine Potenz der unbekannten Größe ohne die niedrigeren im Zusammenhange mit bekannten Größen vorkommt. So sind z. B.

$$ax^2 + b = 0; \quad ax^3 = c; \quad ax^n = f$$

reine Gleichungen des zweiten, dritten, nten Grades.

Eine unreine Gleichung (aequatio affecta) hingegen ist eine solche, in welcher auch noch niedrigere Potenzen der Unbekannten vorkommen. So sind z. B.

$$ax^2 + bx = c; \quad ax^4 - bx^2 - x = f; \quad ax^n + bx^{n-1} = c$$

unreine Gleichungen des zweiten, vierten, nten Grades.

Unter den unreinen Gleichungen unterscheidet man auch wohl noch vollständige und unvollständige Gleichungen, je nachdem alle Potenzen vorkommen oder einige fehlen.

§. 217.

Die Auflösung der reinen Gleichungen irgend eines Grades hat nun keinerlei Schwierigkeit, indem sie durch eine bloße Wurzelausziehung erreicht wird.

Es sei die reine Gleichung des nten Grades

$$ax^n + b = 0$$

gegeben, so folgt aus derselben:

$$x^n = -\frac{b}{a}$$

$$x = \sqrt[n]{\left(\left(-\frac{b}{a}\right)\right)},$$

wo der Sinn der Aufgabe jedesmal angiebt, welche Wurzeln möglich, welche unmöglich sind (§. 163 flg.)

Anders verhält es sich bei den unreinen Gleichungen, wo allgemein gesprochen eine Wurzelausziehung nicht direct möglich ist. Die Aufgabe bei der Auflösung der unreinen Gleichungen ist also entweder dieselbe, während sie eine unreine Gleichung bleibt, so umzuformen, daß eine Wurzelausziehung möglich ist, oder aber sie in eine reine Gleichung zu verwandeln.

§. 218.

Zunächst den ersten Weg einschlagend wollen wir also die Gleichung

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

so umformen, daß sie immer noch eine unreine Gleichung bleibt, aber die Wurzelausziehung zuläßt. Zu diesem Zwecke pflegt man die Gleichung zuerst durch den Coefficienten A von x^2 zu dividiren, wodurch sie die Gestalt annimmt:

$$x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A} = 0.$$

Damit nun eine Wurzelausziehung stattfinden kann, muß auf beiden Seiten so viel Bekanntes addirt oder subtrahirt werden, daß auf der Seite, auf der die unbekannte Größe vorkommt, ein vollständiges Quadrat stehe. Das Quadrat einer zweitheiligen Größe besteht aber (§. 144) aus den Quadraten der beiden Theile und dem doppelten Producte derselben. Wird demnach x^2 als Quadrat

eines Theiles, $\frac{B}{A}x$ als doppeltes Product beider Theile betrachtet, so ist $\frac{B}{2A}$ nothwendig der zweite Theil, dessen Quadrat also $\frac{B^2}{4A^2}$ ist. Daher ist:

$$x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{B^2}{4A^2} = \left(x + \frac{B}{2A}\right)^2.$$

Subtrahiren wir davon die gegebene Gleichung, so erhalten wir

$$\frac{B^2}{4A^2} - \frac{C}{A} = \left(x + \frac{B}{2A}\right)^2.$$

und durch die jetzt ermöglichte Ausziehung der Quadratwurzel:

$$x + \frac{B}{2A} = \sqrt{\left(\left(\frac{B^2}{4A^2} - \frac{C}{A}\right)\right)} = \frac{1}{2A}\sqrt{((B^2-4AC))}.$$

Folglich:

$$x = -\frac{B}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{(B^2 - 4AC)}.$$

§. 219.

Soll der zweite Weg eingeschlagen und die unreine Gleichung in eine reine verwandelt werden, d. h. will man die erste Potenz der Unbekannten wegschaffen, so ist diese gleich der Summe zweier anderen Unbekannten zu setzen, deren eine also später noch willkürlich bestimmt werden kann

Setzt man deßhalb $x = y + z$, so wird:

$$\begin{aligned} Ax^2 &= Ay^2 + 2Azy + Az^2 \\ Bx &= \qquad\quad By + Bz \\ C &= \qquad\qquad\quad C \end{aligned}$$

$$Ax^2 + Bx + C = 0 = Ay^2 + (2Az + B)y + (Az^2 + Bz + C) \quad (1)$$

Um z zu bestimmen und zugleich die erste Potenz der Unbekannten y wegzuschaffen; setzt man deren Coefficienten

$$2Az + B = 0,$$

woraus

$$z = -\frac{B}{2A}, \quad x = y - \frac{B}{2A}.$$

Die durch (1) bezeichnete Gleichung geht dann in folgende über:

$$Ay^2 + \left(\frac{B^2}{4A} - \frac{B^2}{2A} + C\right) = 0,$$

und daraus ergiebt sich

$$y^2 = \frac{B^2 - 4AC}{4A^2},$$

welches eine reine quadratische Gleichung ist, aus welcher

$$y = \frac{1}{2A} \sqrt{((B^2 - 4AC))}$$

$$x = -\frac{B}{2A} \pm \frac{1}{2A} \sqrt{(B^2 - 4AC)}$$

folgt, d. i. derselbe Werth, wie nach der ersten Methode.

§. 220.

Konnte auch nicht unmittelbar $x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}$ als Quadrat angesehen werden, so kann es doch immer als Product zweier ungleicher Binome des ersten Grades betrachtet werden, wenn wir unter dieser Benennung zweitheilige Ausdrücke, wie $x - a$, $x - b$ verstehen, in welchen die Unbekannte nur in der ersten Potenz vorkommt.

Ist nämlich $x - a = P$, $x - b = Q$, so ist:

$$P \cdot Q = (x - a) \cdot (x - b) = x^2 - (a + b)x + ab$$

Nun wird ein Product $= 0$, wenn einer der Factoren $= 0$ wird; also $P \cdot Q = 0$, wenn entweder $P = 0$, $x = a$, $Q = a - b$ ist, oder wenn $Q = 0$, $x = b$, $P = b - a$ ist. Mit anderen Worten:

$$x^2 - (a + b)x + ab = 0, \text{ wenn } x = a \text{ oder } x = b$$

oder jedes Product zweier Binome des ersten Grades $(x - a) \cdot (x - b)$ bildet $= 0$ gesetzt eine quadratische Gleichung, deren beide Wurzeln a, b sind.

Umgekehrt ist jetzt noch zu beweisen, daß die linke Seite einer auf Null gebrachten quadratischen Gleichung als ein solches Product $x^2 - (a + b)x + ab$ angesehen werden kann. Damit dieses stattfinde, muß

$$-(a + b) = \frac{B}{A}, \quad ab = \frac{C}{A}$$

gesetzt werden können, und es muß möglich sein, aus diesen beiden Gleichungen die beiden Unbekannten a, b zu entwickeln.

§. 221.

Diese Aufgabe können wir freilich noch nicht allgemein lösen, da wir uns erst mit solchen Gleichungen beschäftigt haben, in denen nur eine unbekannte Größe vorkommt. Sucht man aber, um die Untersuchung zu Ende zu führen, in diesem speciellen Falle die Auflösung, so findet man, wie sich auch durch Substitution in die gegebenen Gleichungen als richtig erweist:

$$a = -\frac{B}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{(B^2 - 4AC)},\ b = -\frac{B}{2A} \mp \frac{1}{2A}\sqrt{(B^2 - 4AC)}$$

und die Gleichung $x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A} = 0$ geht in folgende über:

$$0 = x^2 - \left[-\frac{B}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{(B^2-4AC)} - \frac{B}{2A} \mp \frac{1}{2A}\sqrt{(B^2-4AC)}\right]x$$
$$+ \left[-\frac{B}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{(B^2-4AC)}\right] \cdot \left[-\frac{B}{2A} \mp \frac{1}{2A}\sqrt{(B^2-4AC)}\right],$$

d. h. das rechts stehende kann als Product solcher einfachen Factoren angesehen werden, und vergleichen wir überdies die früher gefundenen Wurzeln, so finden wir zwischen denselben und den in der Gleichung vorkommenden bekannten Größen folgenden wichtigen Zusammenhang:

Der Coefficient der ersten Potenz von x ist entgegengesetzt genommen gleich der Summe der zwei Wurzeln, und die Größe, welche kein x enthält, ist gleich dem Producte der beiden Wurzeln.

§. 222.

Analoge Sätze, wie sie hier für die quadratischen Gleichungen entwickelt wurden, gelten auch für höhere Gleichungen, ohne daß wir uns hier mit denselben näher beschäftigen können. Nur so viel sei erwähnt, daß jede Gleichung aus so vielen Faktoren zusammengesetzt gedacht werden kann, als ihr Grad angiebt, und daß jeder dieser Factoren die Gestalt $x - \alpha$ besitzt, wo α eine complexe Zahl bezeichnet.

Der erste strenge Beweis davon ist in der Doctordissertation von Gauß enthalten: Demonstratio nova theorematis, omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse 1799. Auf diesen ersten Beweis ließ dann Gauß 1816 noch einen zweiten und dritten folgen (demonstratio nova altera und demonstratio tertia) und endlich noch einen vierten 1849 bei Gelegenheit seines 50jährigen Doctorjubiläums. In der Zwischenzeit erschienen noch andere Beweise von Cauchy, Crelle u. s. w.

§. 223.

Nehmen wir jetzt, da wir keine Gleichungen von höheren Graden berücksichtigen wollen, in der folgenden Betrachtung mehr als eine unbekannte Größe an, so sind in Bezug auf die Anzahl der Unbekannten einerseits und der von einander unabhängigen Gleichungen andererseits drei Fälle möglich.

Erstens können genau eben so viele von einander unabhängige Gleichungen vorgelegt sein, als unbekannte Größen darin vorkommen. Zweitens können mehr Unbekannte vorkommen als Gleichungen gegeben sind. Drittens endlich können mehr Gleichungen als Unbekannte gegeben sein.

Darnach unterscheidet man die Gleichungen in bestimmte, unbestimmte und mehr als bestimmte. Der Grund, warum diese Namen gewählt wurden, liegt in einigen hier zu entwickelnden Sätzen.

§. 224.

Wenn zwischen den unbekannten Größen x, y, z . . . zwei Gleichungen gegeben sind, etwa:

$$a + bx + cy + dz + \ldots = 0 \quad (1)$$

$$a_1 + b_1x + c_1y + d_1z + \ldots = 0 \quad (2)$$

so läßt sich aus diesen beiden Gleichungen immer eine neue Gleichung ableiten, welche eine beliebige Unbekannte, etwa x, nicht mehr enthält; und zwar kann diese Ableitung nach verschiedenen Methoden erfolgen, welche als die verschiedenen Eliminationsmethoden bezeichnet werden, indem man unter Eliminiren das Wegschaffen jener Unbekannten aus den gegebenen Gleichungen versteht.

Die erste Methode ist die Additions- und Subtractionsmethode. Sie besteht darin, daß jede der beiden Gleichungen mit dem Coefficienten der zu eliminirenden Unbekannten aus der anderen Gleichung vervielfacht wird, und diese neue Gleichungen von einander abgezogen werden, wobei naturgemäß die eine Unbekannte wegfällt, da sie jetzt in beiden Gleichungen mit denselben Coefficienten behaftet ist.

So wird in dem angeführten Beispiele (1) mit b_1, (2) mit b multiplicirt. Also

$$a b_1 + b b_1 x + c b_1 y + d b_1 z + \ldots = 0$$

$$b a_1 + b b_1 x + b c_1 y + b d_1 z + \ldots = 0$$

deren Differenz:

$$(a b_1 - b a_1) + (c b_1 - b c_1) y + (d b_1 - b d_1) z + \ldots = 0.$$

Die zweite Methode ist die Combinationsmethode. Man löst beide Gleichungen nach der zu eliminirenden Unbekannten auf, und setzt deren beide Werthe einander gleich.

So folgt aus (1) und (2):

$$x = -\frac{a}{b} - \frac{c}{b} y - \frac{d}{b} z - \ldots$$

$$x = -\frac{a_1}{b_1} - \frac{c_1}{b_1} y - \frac{d_1}{b_1} z - \ldots$$

Also ist auch:

$$-\frac{a}{b} - \frac{c}{b} y - \frac{d}{b} z - \ldots = -\frac{a_1}{b_1} - \frac{c_1}{b_1} y - \frac{d_1}{b_1} z - \ldots$$

Die dritte Methode ist die Substitutionsmethode. Man löst nur die eine Gleichung nach der zu eliminirenden Unbekannten auf und substituirt deren Werth in die zweite Gleichung.

So erhält man durch Substitution von

$$x = -\frac{a}{b} - \frac{c}{b} y - \frac{d}{b} z - \ldots$$

welches aus (1) folgt, in (2) die Gleichung:

$$a_1 - \frac{b_1 a}{b} - \frac{b_1 c}{b} y - \frac{b_1 d}{b} z - \ldots + c_1 y + d_1 z + \ldots = 0.$$

Welche dieser Methoden in jedem speciellen Falle anzuwenden ist, hängt von der Gestalt der Gleichungen ab und ist keiner Regel unterworfen.

§. 225.

Sind nun ferner zwischen n unbekannten Größen x, y, z, v . . . eine beliebige Anzahl etwa auch n Gleichungen gegeben, so lassen sich aus ihnen immer n — 1 neue Gleichungen ableiten, welche eine beliebige unbekannte Größe, etwa x, nicht mehr enthalten.

Nach einer der Methoden des vorigen Paragraphs kann nämlich x zwischen (1) und (2) eliminirt werden, ebenso zwischen (1) und (3), zwischen (1) und (4), . . . endlich zwischen (1) und (n). Man kann z. B. aus (1) den Werth von x durch die anderen Unbekannten ausgedrückt suchen und diesen Werth in die n — 1 übrigen Gleichungen substituiren, welche nach dieser Substitution sämmtlich kein x mehr enthalten werden.

Aus diesen n — 1 Gleichungen zwischen n — 1 Unbekannten lassen sich ganz ähnlich n — 2 Gleichungen zwischen n — 2 Unbekannten ableiten u. s. w., bis schließlich eine einzige Gleichung mit einer einzigen Unbekannten erscheint, welche aufgelöst werden kann.

Nun kann aber die Anordnung der Elimination so getroffen werden, daß jede der Unbekannten als letzte auftritt; folglich werden alle der Reihe nach gefunden werden können, und damit ist zugleich schon die allgemeine Aufgabe gelöst, aus n gegebenen Gleichungen des ersten Grades zwischen n unbekannten Größen diese unbekannten Größen der Reihe nach sämmtlich zu bestimmen.

Weil also n Gleichungen zwischen n Unbekannten zur Bestimmung derselben hinreichen, nennt man sie bestimmte Gleichungen.

§. 226.

Die allgemeine Eliminationsaufgabe, wie sie hier gelöst worden, erlaubt noch in so weit eine Vereinfachung, als die Auffindung der übrigen Unbekannten erleichtert ist, wenn erst eine gefunden ist.

Sind z. B. vier Gleichungen zwischen x, y, z, v gegeben, so verschafft man sich erst drei Gleichungen zwischen y, z, v; dann zwei zwischen z, v; endlich eine, in der nur v vorkommt, und findet so diese Unbekannte. Führt man ihren Werth in eine der Gleichungen zwischen z, v ein, so findet man auch z; dann weiter y, indem man die Werthe von z, v in eine der Gleichungen zwischen y, z, v

einführt; endlich x aus einer der Anfangsgleichungen, in welche man die Werthe von y, z, v substituirt.

Die Auflösung des Eliminationsproblems bei Gleichungen höherer Grade beruht auf denselben Principien, kann aber hier nicht weiter erörtert werden, weil es dabei auf die Auflösung von höheren Gleichungen ankommt.

Ueber eine freilich etwas beschwerliche Zurückführung dieser Aufgabe auf Gleichungen des ersten Grades vergl. Richelot in Crelle's Journal u. s. w. Bd. XXI.

§. 227.

So oft in den vorhergehenden Paragraphen von gegebenen Gleichungen die Rede war, wurde stillschweigend angenommen, daß dieselben von einander unabhängig seien. Zwei oder mehrere Gleichungen heißen nämlich von einander abhängig, wenn alle aus einer und derselben Gleichung durch Addition, Subtraction, Multiplication, oder überhaupt durch irgend eine Operation unmittelbar folgen.

Aus solchen Gleichungen, welche nur in anderer Form immer dieselbe Abhängigkeit der Unbekannten von einander und bekannten Größen aussprechen, kann natürlich keine der Unbekannten eliminirt werden. Sie zählen in dieser Beziehung nur als eine einzige Gleichung.

Solche von einander abhängige Gleichungen sind z. B.:

$3x + 4y + 7 = 2y - 3$ und $9x + 12y + 20 = 6y - 10$

$x - y = y + 4$ und $12x - 11y + 5 = 13y + 53.$

Die Unterscheidung der abhängigen und unabhängigen Gleichungen ist daher von größter Wichtigkeit und überdies nicht immer ganz leicht. Vergl. Suremain de Missery in Gergonne, annales etc. Tome I, pag, 204. und Gergonne in Gergonne, annales etc. Tome XX, pag. 109.

§. 228.

Sind unter den n Gleichungen mit n Unbekannten etwa m von einander abhängige Gleichungen, so ist die Aufgabe der Art, daß aus $n - m + 1$ Gleichungen n Unbekannte gesucht werden sollen.

Da aber aus n — m + 1 Gleichungen nur n — m + 1 Unbekannte mit Bestimmtheit hervorgehen, so sind die Werthe der übrigen m — 1 Unbekannten ganz unbestimmt und können willkürlich angenommen werden. Deßhalb wurden auch §. 223 die Gleichungen als unbestimmte bezeichnet, bei denen die Anzahl der Unbekannten die der Gleichungen übertrifft.

Mitunter treten indessen statt der mangelnden Gleichungen andere Bedingungen ein, welche die Aufgabe doch zu einer bestimmten machen. Diese Bedingungen bestehen in der Regel darin, daß man für die unbekannten Größen nur ganze oder gar nur positive ganze Zahlen zuläßt. Dieser Umstand, daß Eigenschaften der Zahlen in Betracht kommen, die von ihrer Größe unabhängig sind, deuten darauf hin, daß hier das Gebiet der Zahlentheorie beginnt. In der That bildet die Lehre von den unbestimmten Aufgaben einen wesentlichen Theil derselben.

§. 229.

Endlich wurden nach §. 223 mehr als bestimmte Gleichungen genannt, und die Aufgaben darunter verstanden, welche mehr Gleichungen ergaben, als Unbekannte vorhanden waren.

In diesem Falle ist die Aufgabe nur für bestimmte Verhältnisse zwischen den bekannten Größen möglich, welche sich aus den Gleichungen ergeben. Stehen diese Größen nicht in diesem Verhältnisse, so ist die Aufgabe unmöglich.

Gesetzt nämlich es seien zwei Gleichungen mit nur einer Unbekannten gegeben:

$$ax = b \text{ und } a_1 x = b_1,$$

so folgt aus der ersteren $x = \frac{b}{a}$, aus der zweiten $x = \frac{b_1}{a_1}$. Soll daher die Aufgabe eine mögliche sein, so ist dazu erforderlich, daß

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}.$$

Gleichungen der Art, von deren Statthaben die Möglichkeit oder Unmöglichkeit einer Aufgabe abhängt, nennt man Bedingungsgleichungen.

§. 230.

Die Benutzung von mehr Gleichungen, als Unbekannte vorhanden sind, tritt besonders dann ein, wenn die Gleichungen Resultate von Beobachtungen sind, also der unvermeidlichen Versuchsfehler wegen sämmtlich nicht genau richtig sind.

Diese Mangelhaftigkeit wird alsdann auch benutzt, um den Bedingungsgleichungen zu genügen, indem diese als statthabend vorausgesetzt und darnach alle bekannte Größen so corrigirt werden, daß der berechnete Werth der Unbekannten der wahrscheinlichste wird. Die weitere Ausführung dieses Gedankens, auf dem die Methode der kleinsten Quadrate beruht, gehört in die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Von den Proportionen und Progressionen.

---

§. 231.

Wenn in den letzten Paragraphen von Gleichungen die Rede war, so wird es noch weit häufiger der Fall sein, daß zwei Größen derselben Art einander ungleich sind. Fragt man nun nach einem Maße der Ungleichheit zweier Größen, so kann dieses auf zweierlei Weise geschehen.

Man fragt entweder, um wie viel die eine größer sei als die andere, oder man fragt, wie vielmal die eine größer sei als die andere. Beide Bestimmungen werden ein Verhältniß genannt und zwar die erstere ein arithmetisches, die letztere ein geometrisches Verhältniß. Diese Benennungen stehen aber mit der Sache selbst in gar keiner Verbindung, sondern sind willkürlich eingeführt worden.

§. 232.

Die Frage nach dem arithmetischen Verhältnisse zweier Größen ist Nichts anderes, als die Frage nach ihrer Differenz.

Ihre Beantwortung findet sie daher in der Subtraction:

$a - b$ ist das arithmetische Verhältniß der Zahlen a, b.

Denken wir uns außerdem noch zwei Zahlen c, d, deren arithmetisches Verhältniß $c - d$ ist, und ferner, daß die beiden arithmetischen Verhältnisse einander gleich seien, so nennt man diese Gleichheit eine *arithmetische Proportion* und schreibt:

$$a - b = c - d,$$

wodurch also angezeigt wird, daß die vier *Glieder der Proportion* a, b, c, d so beschaffen sind, daß wenn man das zweite von dem ersten subtrahirt, eben so viel übrig bleibt, als bei der Subtraction des vierten von dem dritten.

§. 233.

Zwei Eigenschaften der arithmetischen Proportionen treten sogleich hervor.

Erstens können die äußeren sowie die inneren Glieder verwechselt werden. Denn aus

$$a - b = c - d$$

folgt vermittelst §. 213 unmittelbar:

$$d - b = c - a$$

und

$$a - c = b - d.$$

Zweitens ist die Summe der äußeren Glieder gleich der Summe der inneren Glieder. Denn es ist

$$a + b = b + c.$$

§. 234.

Sind in einer arithmetischen Proportion die beiden inneren Glieder gleich, so daß also nur drei verschiedene Zahlen die Proportion bilden, so nennt man dieselbe eine *stetige arithmetische Proportion* und die Zahl, welche beide inneren Glieder bezeichnet, die *mittlere arithmetische Proportionalzahl* oder das *arithmetische Mittel* der beiden äußeren Glieder.

Eine solche stetige Proportion ist z. B.:

$$17 - 12 = 12 - 7.$$

Das arithmetische Mittel wird nach §. 233 offenbar durch Halbirung der Summe der beiden äußeren Glieder gefunden. Ist

$$a - m = m - b,$$

so ist

$$m = \frac{a + b}{2}.$$

§. 235.

Gehen wir noch einen Schritt weiter, wie wir durch Zusammenfassung zweier Verhältnisse zur Proportion gelangt sind, und denken uns eine ganze Reihenfolge von Zahlen, von denen je drei auf einander folgende in stetiger arithmetischer Proportion stehen, so erhalten wir eine arithmetische Progression. Unter diesem Namen versteht man also eine Reihe von Zahlen, welche immer um gleich viel wachsen oder abnehmen, aus so viel Gliedern dieselbe auch immer bestehen mag.

Zur Bezeichnung der arithmetischen Progression dient mitunter das Zeichen ÷, welches den durch Kommata getrennten Gliedern der Progression vorgesetzt wird. Z. B.:

$$\div\ 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11$$

$$\div\ 24,\ 19,\ 14,\ 9,\ 4.$$

§. 236.

In Bezug auf arithmetische Progressionen können verschiedene Fragen gestellt werden, die darauf beruhen, daß zwischen dem ersten oder Anfangsgliede, der immer constanten Differenz, der Stellenzahl irgend eines Gliedes und diesem Gliede selbst ein einfacher Zusammenhang stattfindet.

Dieser Zusammenhang muß zuerst aufgesucht werden. Es sei a das Anfangsglied und d die Differenz, welche man erhält, wenn man irgend ein Glied von dem unmittelbar darauf folgenden abzieht. Die arithmetische Progression heißt alsdann:

$$\div\ a,\ a + d,\ a + 2d,\ a + 3d,\ \ldots.$$

Das $n$te Glied derselben, wo n irgend eine positive ganze Zahl bedeutet, wird daher $a + (n - 1)d$ sein, oder wenn man das $n$te Glied durch t (terminus generalis) bezeichnet:

$$(1)\quad t = a + (n - 1)d.$$

Durch Umformung der Gleichung (1) findet man alsbald:

$$(2)\quad a = t - (n-1)\,d$$

$$(3)\quad d = \frac{t-a}{n-1}$$

$$(4)\quad n = \frac{t-a+d}{d}.$$

§. 237.

Häufig wird auch verlangt, die Summe der arithmetischen Progression zu finden, d. h. die Summe S aller n Glieder von a bis $a + (n-1)\,d$, welche dieselbe bilden.

Um diese Summe auf leichte Weise zu finden, schreibt man:

$$S = a + (a+d) + (a+2d) + \ldots + (a+[n-1]\,d)$$

und darunter in umgekehrter Reihenfolge:

$$S = (a+[n-1]d) + (a+[n-2]d) + (a+[n-3]d) + \ldots + a.$$

Die Addition der beiden Gleichungen ergiebt nun:

$$2S = (2a+[n-1]d) + (2a+[n-1]d) + (2a+[n-1]d) + \ldots + (2a+[n-1]\,d)$$

oder da jetzt auf der rechten Seite n einander gleiche Glieder stehen:

$$2S = n\,(2a + [n-1]\,d).$$

Folglich endlich

$$(5)\quad S = \frac{n}{2}(2a + [n-1]\,d)$$

oder mit Zuziehung von (1):

$$(6)\quad S + \frac{n}{2}(a+t).$$

Von den manchcherlei Gleichungen, die sich aus (5) und (6) durch Umformungen ergeben, soll nur noch angeführt werden:

$$(7)\quad n = \frac{2S}{a+t}.$$

§. 238.

Unter den in den vorigen Paragraphen abgeleiteten Gleichungen herrscht eine wesentliche Verschiedenheit. Alle Gleichungen nämlich, welche nach a, t, d, S gelöst sind, geben einen Sinn, welcher Zahlenwerth auch für die darin bestimmte Größe erscheint. Die

Formeln (4), (7) aber, welche einen Werth von n liefern, haben zunächst nur einen Sinn, wenn daraus n als positive ganze Zahl hervorgeht, und jeder andere Werth von n bezeichnet die Aufgabe als eine unmögliche.

Choquet, der in den Nouvelles annales de mathématiqes, Tome I, pag. 74, sich mit solchen Formeln beschäftigte, hat versucht, denselben einen Sinn zu unterlegen.

Findet sich nämlich aus

$$S = \frac{n}{2}(2a + [n-1]d)$$

ein gebrochener Werth von n, etwa $n = \frac{p}{q}$, so ist auch

$$S = \frac{p}{2q}\left(2a + \left[\frac{p}{q} - 1\right]d\right) = \frac{p}{2}\left(\frac{2a}{q} + \frac{pd}{q^2} - \frac{d}{q}\right)$$

oder endlich:

$$S = \frac{p}{2}\left(2\left[\frac{a}{q} - \frac{q-1}{2q^2}d\right] + [p-1]\frac{d}{q^2}\right).$$

Folglich ist S auch die Summe einer Progression von p Gliedern, deren erstes Glied $\frac{a}{q} - \frac{q-1}{2q^2} . d = \alpha$ und deren Differenz $\frac{d}{q^2} = \delta$ ist.

Diese neue Progression denken wir uns als in Gruppen von je q Gliedern zerlegt. Das erste Glied der $(m+1)$ten Gruppe ist daher das $(mq+1)$te Glied der Reihe, d. h. $\alpha + mq\delta$ und die Summe der q Glieder dieser Gruppe ist $\frac{q}{2}(2\alpha + 2mq\delta + [q-1]\delta)$ $= a + md$, wenn die Werthe von α und δ eingesetzt werden.

Mit anderen Worten: „die $(m+1)$te Gruppe der secundären Reihe entspricht dem $(m+1)$ten Gliede der ursprünglichen Reihe."

Nun sei $E\left(\frac{p}{q}\right) = p_1$ und $\frac{p}{q} = p_1 + \frac{p_2}{q}$, also $p = p_1 q + p_2$. Um die Summe S zu erhalten, sind also die ersten p_1 Gruppen von je q Gliedern der secundären Reihe zu nehmen und die ersten p_2 Glieder der $(p_1 + 1)$ten Gruppe.

Der gebrochene Werth $\frac{p}{q}$ von n bedeutet daher, man solle zuerst $E\left(\frac{p}{q}\right)$ Glieder der ursprünglichen Reihe nehmen, dann die Differenz d in $\frac{d}{q_2}$ übergehen lassen und von dieser neuen Reihe noch $q\left(\frac{p}{q} - E\left[\frac{p}{q}\right]\right)$ Glieder nehmen.

§. 239.

Aus der arithmetischen Progression lassen sich noch andere Reihen ableiten, welche manche interessante Eigenschaften besitzen und arithmetische Reihen höherer Ordnung genannt werden. Die Entstehungsweise derselben ist der Art, daß das nte Glied irgend einer dieser Reihen gleich der Summe der n ersten Glieder der Reihe nächstniedrigerer Ordnung ist. So sind also:

$$a,\ a + d,\ a + 2d,\ a + 3d, \ldots \quad \text{(I)}$$
$$a,\ 2a + d,\ 3a + 3d,\ 4a + 6d, \ldots \quad \text{(II)}$$
$$a,\ 3a + d,\ 6a + 4d,\ 10a + 10d, \ldots \quad \text{(III)}$$

arithmetische Reihen erster, zweiter und dritter Ordnung.

Bezeichnet t_m das allgemeine oder nte Glied, S_m die Summe der n ersten Glieder einer arithmetischen Reihe mter Ordnung, so ist nach der Definition:

$$t_m = S_{m-1}.$$

Man hat demnach:

$$t_2 = S = \frac{n}{2}(2a + [n - 1]d).$$

Von den Reihen höherer Ordnung läßt sich hier Nichts weiter sagen.

Anmerkung 1. Die Reihe zweiter Ordnung wird auch wohl Polygonalreihe genannt, weil sich so viele Kugeln, als eine Zahl aus dieser Reihe anzeigt, immer in Gestalt eines regelmäßigen Vielecks legen lassen. Aus ähnlichem Grunde heißen die Reihen dritter Ordnung Pyramidalzahlen. Ihre Zahlen geben nämlich an, wie viele Kugeln sich in Gestalt von Pyramiden aufschichten lassen.

Anmerkung 2. Spuren der arithmetischen Reihen finden sich schon bei Gerbert (der als Papst Sylvester II. 1003 starb) in seiner Geometria, edidit Bernardus Pez, Augsburg 1721. Stifel beschäftigte sich ausführlicher mit den Reihen erster und zweiter Ordnung. Faulhaber, ein Rechenmeister zu Ulm um 1600, betrachtete auch die Reihen dritter Ordnung. Die Reihen mter Ordnung behandelte zuerst Newton ((Philosophiae naturalis principia mathematica, Liber III, Lemma V, und die Abhandlung: Methodus differentialis). Eine größere Abhandlung schrieb darüber de Lagny, Traité des progressions arithmétiques de tous les degrés à l'infini in den Memoiren der Pariser Academie für 1722 und Friedrich Christian Maier, de arithmetiea figurata, Tom. III, Comm. Acad. Petropolitanae 1728. Endlich ist ein Aufsatz von Roche, sommation des piles de boulets in Gergonne, annales etc., Tome XVIII, zu vergleichen.

§. 240.

Eine ähnliche Begriffsreihe, wie sie sich uns vom arithmetischen Verhältnisse ausgehend darbot, werden wir auch erhalten, wenn wir vom geometrischen Verhältnisse ausgehen. Das geometrische Verhältniß zweier Größen wird durch die Division gefunden, da es darauf ankommt, zu wissen, wie vielmal eine Zahl größer sei als die andere.

$a : b$ ist das geometrische Verhältniß der Zahlen a, b.

Der Quotient $\frac{a}{b}$ führt alsdann auch wohl den Namen: Exponent des Verhältnisses, nomen rationis.

Denken wir uns noch zwei Zahlen c, d, deren geometrisches Verhältniß $c : d$ ist, und nehmen an, die beiden geometrischen Verhältnisse seien einander gleich, so erhalten wir eine geometrische Proportion und schreiben:

$$a : b = c : d,$$

wodurch also angezeigt wird, daß wenn das erste Glied durch das zweite dividirt wird, derselbe Quotient erscheint, wie bei der Division des dritten Gliedes durch das vierte.

§. 241.

Bei der geometrischen Proportion können die inneren und äußeren Glieder verwechselt werden, denn aus $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ folgt:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \text{ und } \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$$

oder als Proportion geschrieben:

$$a : c = b : d \text{ und } d : b = c : a$$

und zweitens ist das Product der äußeren Glieder gleich dem Producte der inneren Glieder; es ist:

$$a d = b c.$$

§. 242.

Vermittelst dieser Eigenschaften lassen sich aus einer gegebenen Proportion eine Menge anderer herleiten. Ist z. B.:

$$a : b = c : d,$$

so ist auch:

$$(m a + n b) : (p a + q b) = (m c + n d) : (p c + q d).$$

Denn damit dieses stattfinde, muß

$$\frac{m a + n b}{p a + q b} = \frac{m c + n d}{p c + q d}$$

sein, oder auch:

$$\frac{mac + nbc}{pac + qbc} = \frac{mac + nad}{pac + qad}.$$

Diese letztere Gleichung findet aber statt weil $b c = a d$.

§. 243.

Auch bei der geometrischen Proportion ist der Fall hervorzuheben, daß die beiden inneren Glieder einander gleich sind. Man nennt dieses eine stetige geometrische Proportion, und die Zahl, welche beide inneren Glieder bezeichnet, die mittlere geometrische Proportionalzahl der beiden äußeren Glieder.

Eine solche stetige Proportion ist z. B.:

$$24 : 12 = 12 : 6.$$

Die mittlere geometrische Proportionale wird nach §. 241 gefunden, indem man aus dem Producte der beiden äußeren Glieder die Quadratwurzel zieht. Ist:

$$a : m = m : b,$$

so ist:

$$m = \sqrt{ab}.$$

§. 244.

Endlich bilden wir die geometrische Progression, eine Reihe von Zahlen, von denen je drei auf einander folgende in stetiger geometrischer Proportion stehen, bei denen also der Quotient jedes folgenden Gliedes durch das vorhergehende derselbe ist und der Exponent der Progression genannt wird.

Zur Bezeichnung der geometrischen Progression dient das Zeichen $\div\!\!\div$. Z. B.:

$$\div\!\!\div\ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16$$
$$\div\!\!\div\ 81,\ 27,\ 9,\ 3,\ 1$$
$$\div\!\!\div\ a,\ ae,\ ae^2,\ ae^3.$$

§. 245.

Bezeichnet e den Exponenten der Progression, a, n, t, S aber dasselbe für die geometrische Progression, wie früher für die arithmetische, so ist:

$$(1)\quad t = a \cdot e^{n-1}$$
$$(2)\quad a = t \cdot e^{1-n}$$
$$(3)\quad e = \sqrt[n-1]{\left(\left(\frac{t}{a}\right)\right)}.$$

Um auch n zu finden, muß davon ausgegangen werden, daß gleiche Zahlen auch gleiche Logarithmen haben, daß also wegen (1)

$$\log t = \log a + (n-1) \log e,$$

woraus alsdann folgt:

$$(4)\quad n = \frac{\log t - \log a}{\log e} + 1.$$

Um die Summe S zu finden, bedient man sich wieder eines Kunstgriffes:

$$S = a + ae + ae^2 + \ldots + ae^{n-1}.$$

Daraus folgt durch Multiplication mit e:

$$eS = ae + ae^2 + ae^3 + \ldots + ae^n$$

und durch Subtraction der ersteren Gleichung von der zweiten:

$$eS - S = ae^n - a,$$

woraus endlich folgt:

$$(5) \quad S = a \cdot \frac{e^n - 1}{e - 1}.$$

§. 246.

Aehnliche Betrachtungen wie in §. 239 können auch hier zu einer Erklärung des Resultates führen, wenn n in Gestalt eines Bruches $\frac{p}{q}$ auftritt.

Alsdann ist nämlich:

$$S = a \frac{e^{\frac{p}{q}} - 1}{e - 1} = a \cdot \frac{e^{\frac{p}{q}} - 1}{e - 1} \cdot \frac{e^{\frac{p}{q}} - 1}{e^{\frac{p}{q}} - 1}.$$

Aber $a \cdot \frac{e^{\frac{p}{q}} - 1}{e - 1} = \alpha$, $e^{\frac{1}{q}} = \varepsilon$ gesetzt giebt:

$$S = \alpha \cdot \frac{\varepsilon^p - 1}{\varepsilon - 1},$$

d. h. S ist die Summe von p Gliedern einer secundären Progression, deren Anfangsglied α und deren Exponent ε ist. Man findet nun leicht, daß bei Zerlegung dieser Progression in Gruppen von je q Gliedern die mte Gruppe dem mten Gliede der ursprünglichen Reihe entspricht.

Hier bedeutet daher der gebrochene Werth $\frac{p}{q}$ von n, man solle zuerst $E\left(\frac{p}{q}\right)$ Glieder der ursprünglichen Reihe nehmen, dann den Exponenten e in $e^{\frac{1}{q}}$ übergehen lassen, und von dieser neuen Reihe $q\left(\frac{p}{q} - E\left[\frac{p}{q}\right]\right)$ Glieder nehmen.

Anmerkung. Die Betrachtung der geometrischen Progressionen ist schon sehr alt; sie findet sich schon bei Archimed in seiner Sandrechnung (ψαμμίτης, arenarius). Eine Hauptanwendung der

geometrischen Progressionen findet in der sogen. Zinszinsrechnung statt, welche mit Erfolg zuerst von Leibnitz in den acta eruditorum von 1683 bearbeitet wurde.

§. 247.

Außer der arithmetischen und geometrischen Proportion und Progression hat auch noch die harmonische Proportion einen eigenen Namen erhalten. Man sagt nämlich, vier Zahlen a, b, c, d stehen in harmonischer Proportion, wenn:

$$(a - b) : (c - d) = a : d.$$

Eine stetige harmonische Proportion ist eine solche, in welcher die Zahlen b, c einander gleich sind. Z. B.:

$$(12 - 8) : (8 - 6) = 12 : 6.$$

Das harmonische Mittel zweier Zahlen ist dann der doppelte Quotient des Productes jener Zahlen dividirt durch ihre Summe. Denn aus

$$(a - m) : (m - b) = a : b$$

folgt:

$$m = 2 \cdot \frac{ab}{a + b}.$$

Zwischen den drei Mittelzahlen, die wir jetzt kennen gelernt haben, findet selbst eine stetige Proportion statt. Bezeichnet nämlich m_a das arithmetische, m_g das geometrische, m_h das harmonische Mittel zweier Zahlen a, b, so ist:

$$m_a : m_g = m_g : m_h,$$

wie sich leicht aus den Werthen der drei Mittelzahlen ergiebt.

§. 248.

Eine harmonische Reihe besteht aus solchen Zahlen, von denen je drei auf einander folgende in stetiger harmonischer Proportion stehen. Eine solche ist z. B.:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

Diese Reihe der reciproken Zahlen hat den Namen harmonische Reihe, harmonische Proportion hervorgerufen, weil das Verhältniß der auf einander folgenden Glieder derselben das Verhältniß der

Seitenlängen bezeichnet, durch welche die verschiedenen Tonintervalle hervorgebracht werden.

$\frac{1}{2} : 1 = \frac{1}{2}$ giebt die Octave; $\frac{1}{3} : \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$ die Quinte: $\frac{1}{4} : \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$ die Quarte; $\frac{1}{5} : \frac{1}{4} = \frac{4}{5}$ die große Terz u. s. w.

Syntaktik.

---

§. 249.

Die Syntaktik oder Combinationslehre bildet eigentlich einen selbstständigen Theil der Mathematik, wird aber in vielen Untersuchungen allgemeiner Natur aus allen übrigen Parthieen mit Vortheil benutzt und ist deßhalb in ihren Grundzügen hier darzustellen.

Sie beschäftigt sich mit den Fragen, die sich auf die Verhältnisse der Lage und der Ordnung gegebener Dinge beziehen.

Die Dinge, deren Ordnung man betrachtet, werden Elemente genannt und durch Buchstaben mit Zahlenindex oder auch bloß durch Zahlen bezeichnet. Eine jede Zusammenstellung dieser Elemente heißt Form oder Complexion.

§. 250.

Die Verschiedenheit in der Anordnung der Elemente zu Formen kann nun eine zweifache sein. Entweder verlangt man

1) daß die Elemente auf jede mögliche Weise geordnet, aber jedesmal alle gebraucht werden, oder

2) daß die Elemente in Gruppen getheilt werden, in denen nicht alle Elemente vorzukommen brauchen und nicht ebendieselben in zwei Gruppen vorkommen dürfen.

Die Zusammenstellungen, welche der ersteren Aufgabe genügen, heißen Permutationen; die der zweiten Aufgabe genügenden Combinationen.

Um nun alle Permutationen und Combinationen aus gegebenen Elementen systematisch bilden zu können, und sicher zu sein, keine derselben zu übergehen, sind zwei neue Unterscheidungen nöthig; nämlich die von höheren und niedrigeren Elementen und analog von höheren und niedrigeren Formen.

Die erstere erhalten wir, indem wir den Elementen eine Rangordnung geben, die an und für sich willkürlich einmal gegeben die ganze Operation hindurch beibehalten werden muß. Gewöhnlich wird die Rangordnung nach dem Index gegeben, so daß das eine Element ein höheres als ein anderes genannt wird, wenn es eine größere Zahl zum Index hat. Symmetrisch den Elementen ertheilen wir dann auch zweitens den Formen Rangordnung, und nennen die Form die höhere, in welcher an der frühsten Stelle ein niedrigeres Element durch ein höheres vertreten ist.

§. 251.

Nach Einführung dieser Unterscheidung können wir nun sagen, wir werden zunächst alle Permutationsformen erhalten, wenn wir von der niedrigsten Form ausgehend immer die nächsthöhere bilden, bis wir zuletzt zur höchsten Form gelangen. Daher gilt folgende Regel: Man schreibt zuerst die niedrigste Form und läßt dann, so lange als möglich, die ersten Elemente stehen, greift so weit zurück, als man kann, um ein höheres Element an einen niedereren Platz zu bringen, und ordnet hinter demselben nach dem Range. Dieses Verfahren setzt man dann fort, um aus jeder Form die nächsthöhere zu bilden.

Man bezeichnet die Permutationen durch P, hinter welchem in Klammern die zu permutirenden Elemente folgen. Z. B.:

$$P(a_1, a_2, a_3) = a_1 a_2 a_3,\ a_1 a_3 a_2,\ a_2 a_1 a_3,\ a_2 a_3 a_1,\ a_3 a_1 a_2,\ a_3 a_2 a_1.$$

§. 252.

Zur Bildung der Combinationsformen stützt man sich auf dasselbe Princip, wozu noch folgende Bemerkung dient: Da innerhalb

jeder Complexion hier die Stellung der Elemente gleichgültig ist, so muß es erlaubt sein, zur leichteren Auffindung sämmtlicher Formen eine Bedingung hinzutreten zu lassen, welche sich auf diese Ordnung der Elemente bezieht und darin besteht, daß in jeder Complexion die Elemente so geschrieben werden, daß kein niedereres Element auf ein höheres folgt.

Daraus ergiebt sich dann folgende Regel: Man bildet zuerst die niedrigste Form durch so viele Elemente, von dem niedersten anfangend, als in jeder Complexion enthalten sein sollen; dann setzt man in der spätesten Stelle, wo es angeht, ein höheres Element, dem zwar kein niedereres folgen darf, welchem man aber doch wenigstens das möglich niederste Element nachsetzt.

Man bezeichnet die Combinationen durch C und wie viele Elemente zu einer Form genommen werden sollen, durch eine über das C zu setzende Zahl, welche man die Klasse nennt, zu der combinirt werden soll; die zu combinirenden Elemente selbst folgen in Klammern. Soll ein Element mehrfach vorkommen, so ist es entweder so oft zu schreiben, als es vorkommen soll, oder man bezeichnet dieses durch einen zweiten Zahlenindex, der etwa über das Element gesetzt wird. Z. B.:

$$\overset{3}{C}(a_1, a_2, a_2, a_3, a_3) = \overset{3}{C}(a_1, \overset{2}{a_2}, \overset{2}{a_3}) = a_1 a_2 a_2, \; a_1 a_2 a_3, \; a_1 a_3 a_3, \; a_2 a_2 a_3, \; a_2 a_3 a_3.$$

Unter den verschiedenen Möglichkeiten in Bezug auf Wiederholbarkeit der Elemente sind die beiden Extreme die wichtigsten, nämlich

1) wenn die Wiederholung gar nicht erlaubt ist,
2) wenn sie unbeschränkt erlaubt ist.

Den ersten Fall nennt man Combination ohne Wiederholung, den zweiten Combination mit Wiederholung im engeren Sinne.

§. 253.

Sind nun n Elemente gegeben, so kann nach der Zahl ihrer Permutationsformen und ihrer Combinationsformen

ohne und mit Wiederholung gefragt werden. Diese drei Zahlen bezeichnen wir durch:

$$P_n, \; C_n, \; C'_n.$$

Um P_n zu finden, gehen wir davon aus, daß ein Element nur eine Stelle einnehmen kann. Es ist daher $P_1 = 1$. Kommt ein zweites Element hinzu, so kann es vor und hinter das erste treten, es wird daher zweimal so viele Permutationsformen geben als bei einem Element oder $P_2 = 1 . 2$. Ein drittes hinzutretendes Element kann nun in jeder der zweielementigen Formen die erste, zweite oder dritte Stelle einnehmen, die Anzahl wird daher mit 3 multiplicirt. $P_3 = 1 . 2 . 3$. Ganz ebenso erhält man $P_4 = 1 . 2 . 3 . 4$ und endlich allgemein

$$P_n = 1 . 2 . 3 \ldots n.$$

Sind unter den n Elementen m einander gleich, so wird die Anzahl der von einander verschiedenen Permutationsformen kleiner werden, indem immer so viele Formen als durch Permutation der m als verschieden gedachten Elemente unter sich entstehen identisch werden. Bezeichnen wir daher diese Anzahl durch $P_{n(m)}$, so ist:

$$P_{n(m)} = \frac{P_n}{P_m} = \frac{1 . 2 \ldots n}{1 . 2 \ldots m} = (m + 1)(m + 2) \ldots n.$$

§. 254.

Wenn wir, um C_n zu finden, jedes der n Elemente $a_1, a_2, \ldots a_n$ vor jedes der $n - 1$ übrigen setzen, so erhalten wir nicht bloß die Combinationen zur Klasse 2, sondern auch die Permutation einer jeden Form. Bezeichnet nun Cp_n die Anzahl der Combinationen nebst ihrer Permutationen, so ist:

$$\overset{2}{C}p_n = n\,(n - 1).$$

Setzen wir jede der $n\,(n - 1)$ zweielementigen Formen jedem der $n - 2$ übrigen Elemente vor, die noch nicht darin vorkommen, so erhalten wir die Combinationen zur Klasse 3 mit ihren Permutationen, nämlich $\overset{3}{C}p_n = n\,(n - 1)\,(n - 2)$. Fahren wir ganz auf dieselbe Weise fort, so erhalten wir:

$$\overset{k}{C}p_n = n\,(n - 1) \ldots (n - [k - 1]).$$

Daraus wird aber $\overset{k}{C}_n$ gefunden werden müssen, wenn man durch P_k dividirt, also

$$\overset{k}{C}_n = \frac{n(n-1)\ldots.(n-[k-1])}{1.2\ldots k}.$$

§. 255.

Endlich C'_n finden wir durch Zurückführung auf C_n. Bildet man nämlich sämmtliche Combinationsformen der n Elemente mit Wiederholung zur Klasse k und verändert die Indices der einzelnen Elemente in jeder Form, so daß man zu dem ersten 0, zu dem zweiten 1, zu dem dritten 2, zu dem kten $k-1$ addirt, so erhält man neue Formen, in denen nie ein und dasselbe Element mehrmals vorkommt, in denen vielmehr jedes folgende Element höher ist als das vorhergehende, und a_1 das niederste, a_{n+k-1} das höchste Element. Sämmtliche Formen werden daher solche sein, welche erscheinen, wenn man die Combinationen ohne Wiederholung zur Klasse k aus den $n+k-1$ Elementen $a_1, a_2 \ldots. a_{n+k-1}$ bildet. Andererseits kann aber aus jeder Complexion der $\overset{k}{C}(a_1, a_2, \ldots. a_{n+k-1})$ auf dem dem vorigen entgegengesetzten Wege eine Complexion der $\overset{k}{C}\left(\overset{k}{a}_1, \overset{k}{a}_2, \ldots \overset{k}{a}_n\right)$ gebildet werden. Es muß daher sein:

$$\overset{k}{C'}_n = \overset{k}{C}_{n+k-1} = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots.(n+k-1)}{1.2.3\ldots k}.$$

§. 256.

Wenn auch diese beiden Arten von Zusammenstellungen, Permutationen und Combinationen, die einzigen sind, welche bei einer gegebenen Reihe von Elementen möglich sind, so tritt noch eine Art von Verbindungen ein, wenn verschiedene Elementenreihen betrachtet werden. Alsdann kann nämlich verlangt werden, Formen zu bilden, in denen ein Element aus jeder Reihe vorkommen muß, aber auch nur ein einziges vorkommen darf.

Diese Art von Zusammenstellungen nennen wir Variationen und bezeichnen sie durch den Buchstaben V.

Um sämmtliche Variationen leicht zu bilden, fügen wir auch wieder eine Bedingung hinzu, daß nämlich in jeder Form das

Element aus der ersten Reihe zuerst geschrieben werde, daß diesem das Element aus der zweiten Reihe folge, diesem das Element aus der dritten Reihe u. s. w. Dann gilt folgende Regel: Man berücksichtigt zuerst nur die beiden ersten Reihen und setzt jedes Element der ersten Reihe jedem Elemente der zweiten Reihe vor. Jede dieser zweielementigen Formen setzt man dann jedem Elemente der dritten Reihe vor und zieht so eine Reihe nach der andern in Betracht.

Sind z. B. die drei Elementenreihen gegeben:

$$\begin{matrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2 & \\ c_1, & c_2, & c_3, \end{matrix}$$

so bildet man zunächst die Formen: $a_1 b_1$, $a_1 b_2$, $a_2 b_1$, $a_2 b_2$, $a_3 b_1$, $a_3 b_2$ und findet dann:

$$V\begin{pmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2 & \\ c_1, & c_2, & c_3 \end{pmatrix} = \begin{matrix} a_1b_1c_1, & a_1b_2c_1, & a_2b_1c_1, & a_2b_2c_1, & a_3b_1c_1, & a_3b_2c_1, \\ a_1b_1c_2, & a_1b_2c_2, & a_2b_1c_2, & a_2b_2c_2, & a_3b_1c_2, & a_3b_2c_2, \\ a_1b_1c_3, & a_1b_2c_3, & a_2b_1c_3, & a_2b_2c_3, & a_3b_1c_3, & a_3b_2c_3. \end{matrix}$$

§. 257.

Die Anzahl der Variationsformen ergiebt sich aus der Bildungsweise. Enthält die erste Reihe l Elemente, die zweite m Elemente, die dritte n Elemente u. s. w., so ist die Anzahl der Variationen:

$$l \,.\, m \,.\, n \,.\, .\, .\, .$$

Für den Fall, daß in allen Reihen gleich viele, etwa n Elemente sich befinden und r Reihen gegeben sind, kann man die Anzahl der Variationsformen durch $\overset{r}{V}_n$ bezeichnen und findet alsdann:

$$\overset{r}{V}_n = n^r.$$

In diesem letzten Falle sind die Variationen identisch mit Combinationen mit Wiederholungen nebst deren Permutationen.

§. 258.

Die erste Spur der Combinationslehre findet sich bei Johann Butteo, Logistica 1559, wo die Aufgabe gelöst wird, alle verschiedenen mit vier Würfeln möglichen Würfe zu finden. Anwen-

dungen auf die Theorie der Gleichungen finden sich bei Vieta und Thomas Harriot. Pascal und Fermat beschäftigten sich gleichfalls mit Combinationen zu Anfang des 17. Jahrhunderts und legten den Grund zu einer neuen Disciplin, der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Paul Guldin, ein österreichischer Jesuit, 1635, berechnete die Menge der Wörter, die aus 23 Buchstaben zusammengesetzt werden können. Theoretisch interessanter sind schon die Untersuchungen von Franciscus van Schooten, 1657.

Die eigentliche Combinationslehre aber als systematisch geordneter selbstständiger Theil der Mathematik datirt aus dem Jahre 1666, wo der zwanzigjährige Leibnitz seine Dissertation: de arte combinatoria, in Leipzig vertheidigte. Ihm folgten mit mehr oder weniger wichtigen Arbeiten, Wallis 1685, Jacob Bernoulli (ars conjectandi, 1713), nebst anderen Autoren über Wahrscheinlichkeitsrechnung; auch Euler besonders in den Abhandlungen der Petersburger Academie von 1741 — 43.

Diese Arbeiten beschäftigen sich fast durchgängig nur mit den Aufgaben, die sich auf die Anzahl der Formen beziehen. Mit der Darstellung der Formen selbst nach einem festgehaltenen Principe und mit der Betrachtung derselben nach jeder Richtung beschäftigte sich sodann eine ganze Reihe von Mathematikern, welche die combinatorische Schule bilden. An ihrer Spitze stand Hindenburg, 1776. Hervorragende Glieder waren Rothe, Prasse, Weingärtner, Kramp und von den noch lebenden Mathematikern: Schweins, Oettinger, Ettinghausen.

§. 259.

Bei der Bildung der einzelnen Permutationsformen erscheinen einige interessante Untersuchungen, die hier berührt werden müssen.

Es werden nämlich in jeder Form theils höhere Elemente vor niedrigeren stehen, theils umgekehrt. Es möge der erstere Fall eine Inversion heißen, worauf also in jeder Form so viele Inversionen sich finden, als in ihr ein höheres Element einem niedereren vorhergeht. Z. B. sind

in $a_1\, a_2\, a_4\, a_5\, a_3$ 2 Inversionen,
in $a_5\, a_4\, a_1\, a_3\, a_2$ 8 Inversionen.

Die Anzahl J_n der Inversionen, welche in sämmtlichen P_n Permutationsformen von n ungleichen Elementen vorkommen, ist leicht zu finden. Zwei beliebige Elemente a_k, a_l werden nämlich in den Permutationsformen symmetrisch vorkommen; d. h. sämmtliche Formen können in zwei Gruppen zerlegt werden, wo in den Formen der zweiten Gruppe a_l dieselbe Stelle einnimmt, wie a_k in den Formen der ersten Gruppe und umgekehrt. Ist daher a_l ein höheres Element als a_k, so wird in Bezug auf diese beiden Elemente in $\frac{1}{2} P_n$ Formen je eine Inversion stattfinden, in den übrigen $\frac{1}{2} P_n$ Formen keine Inversion. Da dieses aber von zwei beliebigen Elementen gilt und diese offenbar auf $\overset{2}{C}_n$ Arten gewählt werden können, so ist:

$$J_n = \frac{1}{2} P_n \,.\, \overset{2}{C}_n = \frac{n\,(n-1)}{4} \,.\, 1 \,.\, 2 \,..\, n.$$

§. 260.

Eine andere wichtige Frage ist die nach der Anzahl der Inversionen, welche in irgend einer, etwa der kten Permutationsform vorkommen, wenn sämmtliche Permutationsformen nach der Regel des §. 251 nach einander gebildet werden.

Zunächst ist klar, daß die Anzahl n der Elemente auf diese Inversionszahl $\overset{k}{J}$ keinen Einfluß ausübt, weil nicht alle Elemente zur Bildung jeder neuen Form versetzt werden und Inversionen bilden können.

Um aber $\overset{k}{J}$ zu finden, genügt die Bemerkung, daß sämmtliche Inversionen erhalten werden, wenn man die Inversionen addirt, die jedes Element mit den folgenden bildet. Man hat deßhalb nur zu untersuchen, welches Element das erste der permutirten Elemente ist, welche das zweite u. s. w. Mit anderen Worten, man zerlegt k in die Theile:

$$k = c_1 \,.\, P_\alpha + c_2 \,.\, P_{\alpha-1} + \ldots + c_\delta \,.\, P_{\alpha-\delta+1},$$

wo $\delta \leqslant \alpha$ und jedes c höchstens so groß wie der höchste Factor der mit ihm multiplicirten Permutationszahl ist.

Dann wird offenbar:

$$\overset{k}{J} = (c_1 + c_2 + \ldots + c_\delta) - 1 + \frac{(\alpha - \delta + 1)(\alpha - \delta)}{2}.$$

Eine allgemeine Formel zur Ableitung von $\overset{k+1}{J}$ aus $\overset{k}{J}$ ist noch nicht bekannt. Nur folgende speciellere Resultate ergeben sich ohne Mühe:

$$\overset{6k+2}{J} = \overset{6k+1}{J} + 1$$

$$\overset{6k+3}{J} = \overset{6k+1}{J} + 1$$

$$\overset{6k+4}{J} = \overset{6k+1}{J} + 2$$

$$\overset{6k+5}{J} = \overset{6k+1}{J} + 2.$$

§. 261.

Außerdem läßt sich über die Inversionszahl einzelner Formen noch der Satz aussprechen:

Von zwei Complexionen, die nur durch die Stellung zweier Elemente sich unterscheiden, welche in der einen die entgegengesetzten Stellen einnehmen, wie in der anderen, enthält immer die eine eine grade, die andere eine ungrade Anzahl Inversionen.

Die zwei unterscheidenden Elemente seien nämlich γ, δ, und befinden sich an der αten und $\alpha + \beta$ten Stelle der Formen, welche also durch

$$\ldots\ldots (\gamma)_\alpha \ldots\ldots (\delta)_{\alpha+\beta} \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots (\delta)_\alpha \ldots\ldots (\gamma)_{\alpha+\beta} \ldots\ldots$$

dargestellt werden können. Die Elemente, welche durch bloße Punkte angedeutet sind, zerfallen in 3 Abtheilungen, welche durch I, II, III bezeichnet werden sollen. Davon enthält I offenbar $\alpha - 1$ Elemente, II enthält $\beta - 1$ Elemente, III enthält $n - \alpha - \beta$ Elemente. Ferner sei δ ein höheres Element als γ, und es finden sich in I: a Elemente, welche höher als γ, b Elemente, welche höher als δ sind; in II seien c Elemente höher als γ, d Elemente höher als δ; in III endlich seien e Elemente niedriger als γ, f Elemente niedriger als δ. Außerdem mögen in I, II, III unter einander

g Inversionen stattfinden. Bezeichnen wir nun die Inversionen der ersten Form durch i_1, die der zweiten Form durch i_2, so ergiebt sich:

$$i_1 = g + a + b + \beta - 1 - c + e + d + f$$

$$i_2 = g + b + a + \beta - 1 - d + 1 + f + c + e$$

und daher die Differenz:

$$i_2 - i_1 = 2c - 2d + 1,$$

welche ungrad ist; folglich ist von den Zahlen i_1, i_2 die eine grade, die andere ungrade.

§. 262.

Die grade oder ungrade Anzahl von Inversionen ist von Wichtigkeit zur Bildung gewisser Ausdrücke, mit denen neuere Mathematiker sich vielfach beschäftigt haben.

Hat man nämlich mehrere verschiedene Elemente, etwa a, b, c, so bildet man aus denselben alle möglichen Permutationsformen und legt in jeder den sie bildenden Elementen die Zahlenindices 1, 2, 3 bei, also:

$$a_1 b_2 c_3 \quad a_1 c_2 b_3 \quad b_1 a_2 c_3 \quad b_1 c_2 a_3 \quad c_1 a_2 b_3 \quad c_1 b_2 a_3.$$

Dann betrachtet man jede dieser Formen als ein Product und bildet aus denselben eine algebraische Summe, indem jede Form das positive oder negative Zeichen erhält, je nachdem ihre Inversionszahl grade oder ungrade ist. Z. B.:

$$a_1 b_2 c_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3.$$

Die Regel, nach welcher die Vorzeichen bestimmt werden, heißt die Kramer'sche Zeichenregel, weil sie zuerst von Kramer in der Introduction à l'analyse des courbes algébriques, Genève 1750, pag. 657, gelehrt wurde. Der ganze Ausdruck wird nach K. G. J. Jacobi eine Determinante genannt.

Anmerkung. Die Arbeiten Jacobi's über die Determinanten finden sich im XXII. Bande von Crelle's Journal u. s. w. Auch Cayley hat sich seit dem XXX. Bande desselben Journals vielfach mit diesem Gegenstande beschäftigt.

§. 263.

Die Hauptanwendung der Determinanten ist zur Auflösung des allgemeinen Eliminationsproblems, welches zum Schlusse noch betrachtet werden soll.

Es mögen nämlich n Gleichungen des ersten Grades zwischen den n Unbekannten $x_1, x_2, \ldots x_n$ gegeben sein, welche folgendermaßen heißen:

$$A. \begin{cases} (1)_1 x_1 + (2)_1 x_2 + \ldots + (n)_1 x_n = [1] \\ (1)_2 x_1 + (2)_2 x_2 + \ldots + (n)_2 x_n = [2] \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ (1)_n x_1 + (2)_n x_2 + \ldots + (n)_n x_n = [n]. \end{cases}$$

Soll nun x_1 etwa gefunden werden, so multipliciren wir die Gleichungen A, wie sie unter einander stehen, mit $p_1, p_2 \ldots p_n$, welches für's Erste noch unbekannte Ausdrücke sind, deren nähere Bestimmung vorbehalten bleibt.

So entstehen die Gleichungen:

$$B. \begin{cases} (1)_1 p_1 x_1 + (2)_1 p_1 x_2 + \ldots + (n)_1 p_1 x_n = [1] p_1 \\ (1)_2 p_2 x_1 + (2)_2 p_2 x_2 + \ldots + (n)_2 p_2 x_n = [2] p_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ (1)_n p_n x_1 + (2)_n p_n x_2 + \ldots + (n)_n p_n x_n = [n] p_n \end{cases}$$

und durch Addition derselben die Gleichung:

$$C. \begin{cases} \{(1)_1 p_1 + (1)_2 p_2 + \ldots + (1)_n p_n\} x_1 \\ + \{(2)_1 p_1 + (2)_2 p_2 + \ldots + (2)_n p_n\} x_2 \\ + \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad = [1]p_1 + [2]p_2 + \ldots + [n]p_n \\ + \{(n)_1 p_1 + (n)_2 p_2 + \ldots + (n)_n p_n\} x_n. \end{cases}$$

Wäre es nun möglich, die Größen $p_1, p_2, \ldots p_n$ so zu bestimmen, daß die Coefficienten aller Unbekannten in dieser letzten Gleichung, mit Ausnahme des Coefficienten von x_2 zu Null würden, daß man also hätte:

$$D. \begin{cases} (2)_1 p_1 + (2)_2 p_2 + \ldots + (2)_n p_n = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ (n)_1 p_1 + (n)_2 p_2 + \ldots + (n)_n p_n = 0, \end{cases}$$

so ginge die Gleichung C in folgende über:

$$\{(1)_1 p_1 + (1)_2 p_2 + \ldots + (1)_n p_n\} x_1 = [1]p_1 + [2]p_2 + \ldots + [n]p_n$$

und daraus würde alsdann der Werth von x_1 folgen, nämlich:

$$x_1 = \frac{[1] p_1 + [2] p_2 + \ldots + [n] p_n}{(1)_1 p_1 + (2)_2 p_2 + \ldots + (1)_n p_n}.$$

§. 264.

Die Aufgabe besteht also darin, solche Größen $p_1, p_3, \ldots p_n$ zu finden, daß den Gleichungen D Genüge geschehe.

Die Aufgabe läßt sich aber noch anders aussprechen, wenn wir annehmen, $p_1, p_2, \ldots p_n$ werden nur aus den Coefficienten der anderen Unbekannten gebildet, und in ihnen kommen die Coefficienten $(1)_1, (1)_2, \ldots (1)_n$ nicht vor; eine Annahme, welche gerechtfertigt erscheint, wenn wir bedenken, daß sie bei der allmäligen Elimination erfüllt wird.

Unter dieser Voraussetzung können wir nämlich die Aufgabe so aussprechen. Man soll einen Ausdruck $(1)_1 p_1 + (1)_2 p_2 + \ldots + (1)_n p_n$ finden, der aus einer Reihe von Gliedern besteht, deren jedes einen Factor $(1)_k$ besitzt und der zu Null wird, wenn statt des (1) ein anderer Coefficient (2) . . . (n) gesetzt wird.

Ein solcher Ausdruck ist aber die aus den Elementen (1), (2), ... (n) gebildete Determinante. Denn irgend zwei Formen derselben, die sich bloß durch die entgegengesetzte Stellung der Elemente (1), (m) unterscheiden, haben vermöge der Kramer'schen Regel und wegen des Satzes §. 260 entgegengesetzte Vorzeichen. Wird daher in beiden (m) statt (1) gesetzt, so werden die Formen identisch und heben sich gegenseitig zu Null auf.

Der Zähler $[1] p_1 + [2] p_2 + \ldots + [n] p_n$ endlich wird gefunden, indem in der Determinante jedes Element $(1)_m$ durch [m] ersetzt wird.

Anmerkung. Diese Auflösung rührt von Kramer her. Bewiesen findet sie sich unter Anderem in dem Artikel Elimination in dem Supplementbande zu Klügel's mathematischem Wörterbuche, wo auch ausführlichere Literatur gegeben ist.

Druckfehler.

Seite 22 Zeile 10 statt $\times$ lies $=$.
„ 23 „ 22 „ ab „ $-ab$.
„ 28 „ 9 „ Multiplicandus lies Multiplicator.
„ 28 „ 9 „ Multiplicator lies Multiplicandus.